Master 272: Microéconomie 2

Examen, Université Paris-Dauphine, 8 Octobre 2024

Partie 2 (Game Theory): Jérôme MATHIS (LEDa)

Exercice 1 (2 pts)

Lo est une stratégie strictement dominée du joueur ligne: $Lo \prec_1 M$

Une fois l'action Lo éliminée, l est une stratégie strictement dominante du joueur colonne, à laquelle H est l'unique meilleure réponse du joueur ligne.

Ainsi, l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un singleton et s'écrit $N = \{(H, l)\}$.

Il existe quatre issues Pareto-optimales et l'ensemble correspondant s'écrit :

$$\{(M, Le); (M, r); (Lo, r); (Lo, R)\}.$$

Les deux ensembles sont disjoints. L'unique équilibre de Nash n'est pas efficace au sens de Pareto.

Exercice 2 (2 pts)

La fonction de paiement du joueur 2 est strictement concave en y. La condition nécessaire de 1er ordre du joueur 2 est donc suffisante. Elle s'écrit:

$$-2y + 4x = 0$$

ce qui donne

$$y^*(x) = 2x$$

A l'équilibre, le joueur 1 maximise son paiement $g_1(x, y)$ sous contrainte d'une meilleure réponse du joueur 2. Formellement, $x^* \in argmax g^1(x, y^*(x))$ avec $y^*(x) = 2x$. Ce programme d'optimisation revient à maximiser $-\frac{2}{3}x^2 + 3x + 8$. Il s'agit d'une fonction strictement concave en x. La condition nécessaire de 1er ordre du joueur 1 est donc suffisante. Elle s'écrit :

$$-\frac{4}{3}x + 3 = 0$$

On en déduit que l'ensemble des équilibres en sous-jeux parfait est un singleton et vaut $(x^*, y^*) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}\right)$ avec les paiements respectifs : $\left(\frac{91}{8}; \frac{101}{4}\right) = (11.375; 25.25)$.

Exercice 3 (6 pts)

1. *(1,5 pts)* De toute évidence, le joueur 1 n'a pas de stratégie dominante, ce jeu n'est donc pas un dilemme du prisonnier.

Le joueur 2 a une stratégie strictement dominante qui consiste à jouer l'action R. La meilleure réponse du joueur 1 à R est D (formellement, $BR^1(R) = \{D\}$). Ce jeu a donc un unique équilibre de Nash: (D, R).

Cet équilibre de Nash est Pareto-dominé par l'issue (U, L).

2. *(1,5 pts)* Puisque le jeu d'étape a un unique équilibre de Nash, le seul équilibre parfait en sous-jeu de la répétition finie consiste à répéter à chaque étape l'équilibre de Nash du jeu d'étape.

   Ceci peut être montré par induction à rebours. A la dernière période T, le joueur 2 joue sa stratégie dominante R à laquelle le joueur 1 joue sa meilleure réponse : l'action D. A la période précédente $T - 1$, ce qui est joué n'aura aucun impact sur ce qui sera joué au cours de la période suivante. Ainsi, le choix des joueurs est identique, à savoir la paire d'action (D, R). Par induction à rebours, ce raisonnement s'applique à toutes les périodes, et l'équilibre de Nash du jeu d'étape (D, R) est répété T fois.

3. *(3 pts)* Lorsque l'interaction se répète un nombre infini de fois, l'issue (U, L) qui Pareto-domine l'équilibre de Nash du jeu d'étape (D, R) est soutenable à l'équilibre de l'interaction répétée.

   Considérons la stratégie à gâchette (« grim-trigger ») qui consiste pour le joueur 1 (resp. 2):
   - à commencer par jouer l'action U (resp. L) ; puis
   - à répéter cette action dans le temps tant que la paire d'actions (U, L) a été joué dans le passé ; et sinon
   - à jouer l'action D (resp. R) pour toujours.

   Face à cette stratégie, le joueur 1 n'a pas de déviation unilatérale profitable car $BR^1(L) = \{U\}$. Il n'y a donc pas de condition sur δ_1. Le joueur 2 n'a pas de déviation unilatérale profitable si son gain associé à (U, L) (en notant δ^2 plutôt que δ_2):

$$2\sum_{t=1}^{+\infty} \delta^{2t} = \frac{2\delta^2}{1-\delta^2} \qquad (A)$$

   est supérieur à son écart le plus profitable à la date k, pour tout k, ce qui donne :

$$2\sum_{t=1}^{k-1} \delta^{2t} + 3\delta^{2k} + 1\sum_{t=k+1}^{+\infty} \delta^{2t} \qquad (B)$$

   $(A - B)$ s'écrit

$$2\sum_{t=1}^{+\infty} \delta^{2t} - \left(2\sum_{t=1}^{k-1} \delta^{2t} + 3\delta^{2k} + 1\sum_{t=k+1}^{+\infty} \delta^{2t}\right)$$
$$= (2-3)\delta^{2k} + (2-1)\sum_{t=k+1}^{+\infty} \delta^{2t}$$
$$= -\delta^{2k} + \sum_{t=k+1}^{+\infty} \delta^{2t} \simeq -\delta^{2k} + \frac{\delta^{2k+1}}{1-\delta} = \frac{-\delta^{2k} + 2\delta^{2k+1}}{1-\delta}$$

   qui est positif si et seulement si $-\delta^{2k} + 2\delta^{2k+1} \geq 0$, c'est-à-dire quand $\delta^2 \geq \frac{1}{2}$. Donc le couple (δ_1, δ_2) doit appartenir à l'ensemble $]0,1[\times [\frac{1}{2}; 1[$.