Game Theory
(Microeconomics)

Chapitre 3: JEUX RÉPÉTÉS

Jérôme MATHIS (LEDa)

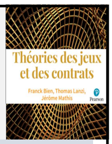
Diapositives tirées du livre

« **Théorie des jeux et contrats** »

Auteurs:
Franck Bien, Thomas Lanzi et Jérôme Mathis

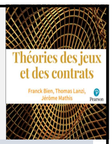
Édition: Pearson

Jeux répétés
Plan



- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Jeux répétés
Plan



- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- L'unique équilibre de Nash de ce jeu est la trahison commune : (t_1, t_2).
- Cette issue est sous-optimale.
  - Car Pareto-dominée par la situation de coopération commune (c_1, c_2), par laquelle chaque joueur gagnerait 2 unités de plus (3 au lieu de 1).

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- Le caractère répété d'une interaction permet-il de résoudre le dilemme du prisonnier ?
  - Si oui, sous quelles conditions ?
  - En particulier, combien de fois faut-il que l'interaction soit répétée pour que les joueurs acceptent rationnellement de coopérer ?

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier

- Considérons la situation où chacun pense jouer de manière répétée avec l'autre
  - E.g., chaque jour pour une longue période.
  - Prisonniers → Ménage au sein d'une colocation d'étudiants
- Le jeu est quotidiennement répété, et peut s'arrêter le jour suivant avec une probabilité de 1 %.
  - Chaque jour, les joueurs pensent qu'il y a 99 % de chances pour que l'interaction continue le lendemain.
  - Supposons que cette probabilité est indépendante de l'histoire des actions jouées jusque-là.
  - La probabilité que le jeu soit répété exactement k périodes s'écrit $(0{,}99)^{k-1} \times 0{,}01$.

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier

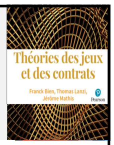
- Dans ce jeu répété, des comportements très coopératifs peuvent être soutenus à l'équilibre.

- Considérons par exemple la stratégie qui consiste à coopérer le premier jour, puis à :

  - continuer de coopérer aussi longtemps que l'autre coopère ; et

  - ne plus jamais coopérer, dès lors qu'un manque de coopération a été observé.

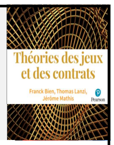
Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier



		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- Si les deux joueurs adoptent cette stratégie, ils perçoivent tous deux un paiement de:
  - 3 pour chaque jour de coopération;
  - 4 le jour de la déviation, puis 1 pour toujours.

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier



		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- Le paiement espéré le long du chemin de la coopération s'écrit :

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} (0{,}99)^{k-1} \times 3 = \frac{3}{1-0{,}99} = 300$$

- Le paiement espéré à la suite d'une déviation à la première étape s'écrit:

$$B = 4 + \sum_{k=2}^{+\infty} (0{,}99)^{k-1} \times 1 = 4 + \frac{0{,}99}{1-0{,}99} = 103.$$

Introduction

La résolution du dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- Clairement, aucun joueur n'a intérêt à dévier de manière unilatérale à la première étape puisque $A - B = 197 > 0$.

Q.: Y a-t-il une déviation unilatérale profitable à d'autres étapes ?

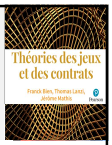
Introduction

La résolution du dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

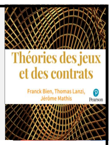
- R.:

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier



		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier



		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

Introduction
La résolution du dilemme du prisonnier

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- Il n'y a donc pas de déviation unilatérale profitable lorsque les deux joueurs adoptent la stratégie mentionnée ci-dessus.

Jeux répétés
Plan

Introduction
Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois

- Lorsque le dilemme du prisonnier est répété un nombre fini de fois, l'équilibre parfait en sous-jeux peut être caractérisé par la méthode d'induction à rebours.

- Imaginons qu'il est connaissance commune que le dilemme du prisonnier est répété exactement 50 fois.

Introduction
Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois

- À la 50[e] période:
  - Le dilemme est joué pour la dernière fois.
  - Aucun joueur n'a donc intérêt à coopérer.
  - Chacun sait qu'il n'y a pas d'interaction future et que ce qui résulte de l'interaction de cette dernière période n'impacte pas les comportements passés.
  - Les joueurs jouent donc leur stratégie dominante du jeu en un coup : la trahison.

Introduction

Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois

- À la 49e période:
  - Tout se passe comme s'il s'agissait de la dernière période.
  - Car les paiements futurs (ceux de la 50e période) ne dépendent pas, en vertu du raisonnement qui précède, de l'histoire des coups passés.
  - Le même raisonnement s'applique et chaque joueur opte pour la trahison à cette période.
- Etc…

Introduction

Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois

- Ce raisonnement s'étend par induction à rebours à l'ensemble des périodes précédentes : aucune période de coopération n'est soutenable à l'équilibre.
- Nous obtenons donc le résultat que la connaissance commune d'une date de fin d'interaction empêche de soutenir des comportements coopératifs à l'équilibre.

Jeux répétés
Plan

Introduction
Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?

- Jeu répété un nombre <u>fini</u> de fois:
  - les agents ont pleine conscience d'une période finale qui sonne le glas de leur interaction.
- Jeu répété un nombre <u>infini</u> de fois:
  - A chaque période les joueurs pensent qu'il est possible que l'interaction se poursuive.

- Le fait que les joueurs ont une durée de vie finie n'implique donc pas nécessairement une modélisation de leur interaction à l'aide d'un jeu répété un nombre fini de fois.

Introduction

Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?

- Dans le cas de nombreux jeux (mais pas tous), comme le dilemme du prisonnier, le fait que l'interaction soit répétée un nombre fini ou infini de fois change drastiquement les comportements d'équilibre :
  - non-résolution du dilemme dans le cas fini, et
  - possible résolution dans le cas infini.

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Construction du jeu répété

- La construction d'un jeu répété débute avec celle d'un jeu d'étape, répété au cours du temps.
- Nous nous intéressons ici à la répétition d'un jeu simultané.

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Construction du jeu répété
Jeu d'étape

Le *jeu d'étape* représente une interaction stratégique simultanée entre N joueurs, qui s'écrit

$$G =< \mathcal{N}, S, (g_i)_{i\in\mathcal{N}} >$$

avec :

- $\mathcal{N} = \{1,2, \dots, N\}$ l'ensemble des N joueurs ;
- $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$, où S_i désigne l'ensemble des stratégies pures du jeu d'étape (ou actions possibles) du joueur $i \in \mathcal{N}$;
- $g_i(.)$ la fonction de gains (ou d'utilité) du joueur $i \in \mathcal{N}$.

$$g_i: S \to \mathbb{R}$$
$$(s_1, s_2, \dots, s_N) \to g_i(s_1, s_2, \dots, s_N)$$

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Construction du jeu répété
Répétition du jeu d'étape

- Le jeu répété consiste à jouer, à chaque période $t \in \{1,2,\ldots,T\}$, le jeu d'étape G.
- Le jeu d'étape est donc répété T fois (ce nombre peut être infini).

Construction du jeu répété
Répétition du jeu d'étape

- La répétition du jeu d'étape jusqu'au début de la période $t \in \{1,2,\ldots,T\}$ produit une histoire d'actions passées, notée $H_t \in S^{t-1}$.
  - On démarre en $S^0 := \{\emptyset\}$.
  - Celle-ci correspond à une suite d'actions retenue par chaque joueur au cours des $(t-1)$ périodes précédentes.
  - L'histoire H_t est donc composée de $N \times (t-1)$ actions qui correspondent à $(t-1)$ parties de G, jouées successivement.
- L'ensemble de toutes les histoires possibles est noté $\mathcal{H} = \bigcup_{t=1}^{T} S^{t-1}$.

Construction du jeu répété
Répétition du jeu d'étape

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

- E.g., dans notre dilemme du prisonnier à 2 joueurs, l'histoire des coups passés de la 4[e] période qui correspond à:
  - une coopération mutuelle durant les deux premières périodes; et
  - à une trahison du joueur 1 à la troisième période

  s'écrit $H_4 = ((c_1, c_2), (c_1, c_2), (t_1, c_2))$.

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Construction du jeu répété
Stratégies du jeu répété

- Chaque histoire H_t définit un nouveau jeu $G(H_t)$ qui débute en H_t.
- Une ***stratégie pure du jeu répété*** pour le joueur $i \in \mathcal{N}$, se définit comme une famille d'applications $s_i = (s_{i,t})_{t\in\{1,2,\ldots,T\}}$, qui pour chaque période $t \in \{1,2,\ldots,T\}$ prend la forme:

$$s_{i,t}: S^{t-1} \to S_i$$
$$H_t \to s_{i,t}(H_t)$$

Construction du jeu répété
Stratégies du jeu répété

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	$(1,1)$	$(4,0)$
	c_1	$(0,4)$	$(3,3)$

- E.g., dans le dilemme du prisonnier, une stratégie pure du jeu répété pour le joueur 2 peut consister à:
  - coopérer à la 4^{e} période si et seulement si le joueur 1 a coopéré à la 1ère et à la 3^{e} période
  - ce qui s'écrit $s_{2,4} = c_2$ si et seulement si H_4 est du type $\big((c_1,.),(.,.),(c_1,.)\big)$
    - où les points représentants les coordonnées de ce profil peuvent être remplacés par n'importe quelle action du joueur correspondant.

Construction du jeu répété
Stratégies du jeu répété

- Une ***<u>stratégie de comportement du jeu répété</u>*** pour le joueur $i \in \mathcal{N}$, se définit comme une famille d'applications $\sigma_i = (\sigma_{i,t})_{t\in\{1,2,\ldots,T\}}$, avec pour chaque période $t \in \{1,2,\ldots,T\}$, prend la forme:

$$\sigma_{i,t}: S^{t-1} \rightarrow \Delta(S_i)$$
$$H_t \rightarrow \sigma_{i,t}(H_t)$$

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Dans notre exemple introductif, à chaque étape les joueurs répètent l'interaction avec probabilité $(1 - q) = 99$ % et le jeu s'arrête avec probabilité $q = 1\%$.
  - Conditionnellement au fait que le jeu est répété au moins $k + 1$ fois, les joueurs accordent autant d'importance à leurs paiements de la période k qu'à leurs paiements de la période $k + 1$.
- Une autre interprétation qui peut être donnée à cette représentation est que le jeu est répété un nombre infini de fois, mais que les joueurs attachent plus d'importance à leurs paiements d'aujourd'hui qu'à leurs paiements de demain.

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Nous pouvons alors introduire un ***facteur d'escompte***, noté $\delta \in [0,1]$.
  - Le paiement de la date suivante est escompté à l'aide de ce facteur pour représenter ce à quoi il correspond aujourd'hui.
  - Un paiement de x perçu à la période suivante compte pour $\delta \times x$ à la période actuelle.
  - Plus le facteur d'escompte est élevé et plus le joueur est patient.

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Dans le cas d'une entreprise, ce facteur d'escompte peut être lié au taux d'intérêt auxquels la firme a accès sur le marché des fonds prêtables.

  - <u>Capitalisation:</u>

    1 € aujourd'hui → $1 + r$ € dans un an

    (r dénote le taux d'intérêt annuel)

  - <u>Actualisation</u>:

    M€ perçu dans n périodes → $\frac{M}{(1+r)^n}$€ aujourd'hui

    (r dénote le taux d'intérêt périodique (e.g., années, mois, etc.))

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Le facteur d'escompte peut alors s'écrire:

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

  lorsque r représente le taux d'intérêt d'une période à l'autre (e.g., un taux annuel, mensuel, etc.) ;

- Il s'écrit:

$$\delta = e^{-r\tau}$$

  lorsque r représente le taux d'intérêt instantané et τ le temps qui sépare une période de l'autre.

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Le paiement du joueur $i \in \mathcal{N}$ dans le jeu répété T fois s'écrit donc:

$$\sum_{t=1}^{T} \delta^t g_i(.)$$

lorsque l'interaction démarre en $t = 1$

- Il s'écrit:

$$\sum_{t=1}^{T} \delta^t g_i(.)$$

lorsque celle-ci démarre en $t = 0$.
Ce qui est équivalent à $\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} g_i(.)$

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Dans certain cas, on s'intéresse au ***taux d'escompte***, noté $\lambda \in (0,1]$ pour obtenir le paiement escompté

$$\sum_{t=1}^{T} (1-\lambda)^{t-1} g_i(.)$$

- Avec l'interprétation que gagner un paiement de $(1 - \lambda)$ aujourd'hui est équivalent à recevoir le paiement 1 demain.

- Prendre $\lambda = 1$ revient à considérer le jeu « en un coup » (i.e., obtenu avec $T = 1$).

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- De manière à comparer le paiement du jeu d'étape à celui du jeu répété, nous nous intéressons parfois au ***paiement moyen*** obtenu en divisant le paiement escompté par $\sum_t \delta^t$ $\left(ou\ \sum_t (1-\lambda)^{t-1}\right)$.

Q.: Calculer les paiements moyens des paiements escomptés suivant:

a) $\sum_{t=1}^{T} \delta^t g_i(.)$

b) $\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t g_i(.)$

c) $\sum_{t=1}^{T} (1-\lambda)^{t-1}\, g_i(.)$

Que valent ces expressions lorsque $T = +\infty$?

Construction du jeu répété
Paiement escompté

R.:

a)

b)

Construction du jeu répété
Paiement escompté

R.:

c)

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- De la sorte, la valeur du paiement moyen du jeu répété est donc toujours comprise dans l'espace des paiements du jeu d'étape.
- Il est alors aisé de voir si la répétition permet on non à un joueur d'améliorer son paiement par rapport à ce qu'il obtient lorsque le jeu d'étape n'est joué qu'une seule fois.

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- Le facteur (ou taux) d'escompte, tel qu'il est modélisé dans ce chapitre, est supposé satisfaire deux propriétés:

1. Il ne varie pas d'un individu à l'autre
(i.e., δ et λ ne dépendent pas de i).

2. Pour un même individu, il ne varie pas au cours du temps
(i.e., δ et λ ne dépendent pas de t).

Construction du jeu répété
Paiement escompté

- La littérature académique a déjà souligné combien ces deux hypothèses peuvent manquer de réalisme.

- Harrison, Glenn W., Morten I. Lau and Melonie B. (2002) : « Williams, Estimating Individual Discount Rates in Denmark: A Field Experiment », *American Economic Review*, Vol. 92, No. 5, pp. 1606-1617
- Ruffle, B. J., & Wilson, A. E. (2019): "Tat will tell: Tattoos and time preferences", *Journal of Economic Behavior & Organization*, 166, 566-585.
- Warner, John T., and Saul Pleeter (2001) : "The Personal Discount Rate: Evidence from Military Downsizing Programs", *American Economic Review*, Vol. 91, No. 1, pp. 33-53
- DellaVigna, Stefano and Ulrike Malmendier (2006) : "Paying Not to Go to the Gym", *American Economic Review*, 96(3): 694-719.

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Construction du jeu répété
Concept de solution

- Rationalité séquentielle:
  - les joueurs adoptent un comportement optimal dans tous sous-jeux, même ceux situés en dehors du chemin d'équilibre.
    → Elimination des menaces non crédibles.
- Le profil stratégique $(\sigma_i)_{i\in\mathcal{N}}$ est un ***<u>équilibre parfait en sous-jeux</u>*** si pour toute histoire $H_t \in S^{t-1}$, le profil stratégique $(\sigma_i(H_t))_{i\in\mathcal{N}}$ est un équilibre de Nash du jeu $G(H_t)$.

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Diapositives du livre "Microéconomie : Théorie des jeux et contrats" ©Jérôme MATHIS

Résultats théoriques
Principe de déviation en un coup

- Blackwell (1965). Principe d'optimalité en programmation dynamique :

  « one-shot deviation principle »
  « principe de déviation en un coup ».

- Stipule que:

  un profil stratégique est un équilibre parfait en sous-jeux
  si et seulement si
  il n'y a pas de déviation unilatérale *d'une seule période*
  (c'est-à-dire « en un coup ») profitable.

Diapositives du livre "Microéconomie : Théorie des jeux et contrats" ©Jérôme MATHIS

Résultats théoriques
Principe de déviation en un coup

- E.g., dans un jeu répété 3 fois, pour vérifier qu'un profil stratégique est un équilibre parfait en sous-jeux, il suffit de vérifier qu'il n'y a pas de déviation unilatérale profitable à:
  - la première étape;
  - la seconde étape; et à
  - la troisième étape.

- Il est inutile de vérifier qu'aucune déviation unilatérale (du même joueur) sur deux ou trois étapes conjointement n'est profitable.

Résultats théoriques
Principe de déviation en un coup

- Il s'applique en particulier à notre cadre de jeux répétés un nombre:
  - fini de fois, et
  - infini de fois, pourvu que la fonction de gain de chaque joueur est bornée
    - de sorte que sous forme escomptée, le paiement de long terme satisfait une propriété de continuité à l'infini.

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

- Supposons $T < +\infty$.
- Lorsque le jeu possède un unique équilibre de Nash, le jeu répété (un nombre fini de fois) possède un unique équilibre parfait en sous-jeux : la répétition à chaque période de l'équilibre de Nash du jeu d'étape.
  - En particulier, dans le dilemme du prisonnier, les joueurs se trahissent à chaque interaction, que celle-ci soit unique ou répétée 100 fois.

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

- Pour améliorer les paiements, il est donc nécessaire que le jeu d'étape possède plus d'un équilibre de Nash.
- Considérons une version modifiée du dilemme du prisonnier où l'on ajoute une troisième action, notée p_i, $i \in \{1,2\}$.

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

- Ce jeu d'étape possède deux équilibres de Nash en stratégie pure:

$$(t_1, t_2) \qquad \text{et} \qquad (p_1, p_2).$$

- Le second équilibre est Pareto dominé par le premier.
  - Mais il est pourtant très utile.

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

Q.: Lorsque $T = 2$. Proposez divers équilibres parfait en sous-jeux.

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

R.:

Résultats théoriques

Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

Résultats théoriques

Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

Q.: Est-il possible de soutenir un paiement plus élevé que ceux procurés par les équilibres de Nash du jeu d'étape ?

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

R.:

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

Q.: Vérifiez sous quelles conditions cette stratégie, lorsqu'elle est adoptée par les deux joueurs, soutient un équilibre parfait en sous-jeux.

Résultats théoriques

Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

R.:

Résultats théoriques

Jeux répétés finis

		Joueur 2		
		p_2	t_2	c_2
Joueur 1	p_1	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	t_1	(0,0)	(3,3)	(5,0)
	c_1	(0,0)	(0,5)	(4,4)

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

- Ici nous avons deux équilibres de Nash du jeu d'étape.
  - L'un, (p_1, p_2), qui sert de punition.
  - L'autre, (t_1, t_2), qui sert de récompense.
- Ces deux outils (punition et récompense), sont utilisés pour inciter à la coopération en amont.
- Pour qu'ils fonctionnent correctement, il est nécessaire que les joueurs valorisent suffisamment leurs paiements futurs.
  - Car sinon, ni la possibilité d'une punition ni celle d'une récompense future ne peut convaincre le joueur impatient de ne pas trahir l'autre au cours de la période actuelle.

Résultats théoriques
Jeux répétés finis

- Des raisonnements similaires s'appliquent à des interactions répétées un plus grand nombre de fois ($T > 2$).
- Dans certains cas, la coopération peut alors prendre place:

  - à toutes les périodes sauf la dernière
    Cf. applications numériques 3.3 et 3.4.

  - uniquement durant les toutes premières périodes du jeu
    Cf. application numérique 3.5.

Jeux répétés
Plan

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Supposons $T = +\infty$.
- La résolution devient non triviale pour au moins deux raisons:
  - La méthode d'induction à rebours ne peut pas être appliquée.
  - Il n'est pas évident de formuler les stratégies.

<u>Q.:</u> Combien y a-t-il de stratégies pures dans un jeu répété infini ?

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Supposons $T = +\infty$.
- La résolution devient non triviale pour au moins deux raisons:
  - La méthode d'induction à rebours ne peut pas être appliquée.
  - Il n'est pas évident de formuler les stratégies.

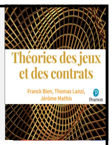
Q.: Combien y a-t-il de stratégies pures dans un jeu répété infini ?

R.:

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Dans un tel contexte, à quoi ressemble un équilibre de Nash ?
- Le théorème de Nash nous assure l'existence d'un équilibre dans tout jeu *fini* et ne s'applique donc pas ici.
- De plus, le nombre infini de stratégies pures d'un jeu répété infini peut potentiellement produire une infinité d'équilibre en stratégies pures.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

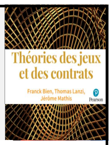


- Pour contourner ces problèmes, les théoriciens des jeux ont tendance à s'intéresser aux paiements que produisent les équilibres sans avoir à énumérer la liste exhaustive des équilibres à l'origine de ces paiements.

- L'exercice consiste alors à caractériser l'ensemble des paiements d'équilibre plutôt que l'ensemble des équilibres.

- Pour ce faire, il existe une classe de résultats nommés « *folk theorem* ».

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis



- Les « folk theorems » qui nous intéressent ici caractérisent l'ensemble des paiements qui peuvent être soutenus à l'équilibre d'une classe de jeu donné.

- Ils illustrent comment la répétition de l'interaction permet aux joueurs d'améliorer leurs paiements à l'équilibre.

- L'idée sous-jacente est que cette répétition permet aux joueurs de s'entendre sur une séquence d'actions et de punir ceux qui dévieraient de cette séquence.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Les résultats énoncent que si

les joueurs sont suffisamment patients

alors

toute issue qui leur procure un paiement
qu'ils sont individuellement capables de se garantir
(en jouant une stratégie qui les préservent du pire)
peut être soutenue à l'équilibre.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Il y a autant de « folk theorem » que de classes de jeu.

- Ces classes se distinguent essentiellement selon :
  - que la répétition du jeu est finie ou infinie;
  - que l'information est complète ou incomplète;
  - que les paiements sont comptabilisés de manière escomptés ou selon une autre procédure ;

    E.g., paiements moyens, limite supérieure, limite inférieure, etc.
  - le critère de solution retenu

    E.g., équilibre de Nash, EPSJ, équilibre corrélé, ...

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Dans le cadre de ce chapitre, nous nous intéressons à la classe de jeu où:

  - l'information est complète;

  - les paiements sont escomptés; et

  - le critère de solution est celui de l'équilibre parfait en sous-jeux.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Les paiements du jeu d'étape imposent naturellement des bornes sur les paiements moyens que les joueurs sont capables d'obtenir.

  - Impossible de se situer en-dehors de l'enveloppe convexe des paiements du jeu d'étape.

- On dit qu'un paiement du jeu d'étape G est ***réalisable*** s'il peut être obtenu à l'aide d'une combinaison convexe de paiements de stratégies pures du jeu d'étape.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Dans la suite, on note V l'ensemble des profils de paiements réalisables.

- Il s'agit d'un polytope convexe qui englobe l'ensemble des loteries sur les paiements du jeu d'étape, et qui formellement s'écrit

$$V \coloneqq conv\{g(S)\} = g\big(\Delta(S)\big)$$

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Plus précisément, il s'agit de l'ensemble des profils de paiements $(\pi_i)_{i\in\mathcal{N}}$ pour lesquels:

  - $\exists(\lambda_k)_{k\in K\equiv\{1,2,\ldots,(card(S_1)\times card(S_2)\times\cdots\times card(S_N))\}}$ avec
  $$\lambda_k \geq 0\ \forall\ k \in K \text{ et } \textstyle\sum_{k\in K} \lambda_k = 1,$$

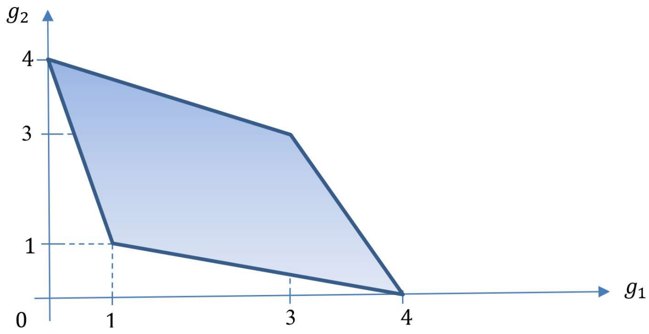
  - tel que $\forall\ i \in \mathcal{N}$, on a
  $$\pi_i = \textstyle\sum_{k\in K} \lambda_k\, g_i((s_1, s_2, \ldots, s_N)_k)$$

où $((s_1, s_2, \ldots, s_N)_k)_{k\in K}$ désigne l'ensemble des profils d'actions possibles du jeu d'étape G.

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)



- L'ensemble des paiements réalisables du dilemme du prisonnier correspond au quadrilatère qui lie les quatre paires de paiements du jeu d'étape.

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

1er « Folk theorem » : amélioration des paiements d'équilibre de Nash du jeu d'étape

- Considérons un équilibre de Nash du jeu d'étape qui procure le paiement $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- Lorsque le jeu d'étape est répété un nombre infini de fois, existe-t-il un équilibre parfait en sous-jeux où chaque joueur $i \in \mathcal{N}$ obtient un paiement moyen supérieur à u_i ?
- Le théorème suivant nous assure que la réponse est affirmative, à condition que les joueurs soient suffisamment patients.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Théorème 1 (Friedman, 1971). *Soit un jeu d'étape G qui admet un équilibre de Nash avec profil de paiement* $\boldsymbol{u}$.

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \textit{ tel que } v_i > u_i \;\forall\, i \in \mathcal{N},\; \exists\, \overline{\delta} \textit{ tel que}$$

$$\textit{lorsque } \delta_i > \overline{\delta} \;\forall\, i \in \mathcal{N},\; \exists \textit{ EPSJ du jeu répété infini}$$

$$\textit{dont le profil de paiement actualisé moyen est } \boldsymbol{v}.$$

- Dit autrement, lorsqu'il existe un paiement réalisable et Pareto strictement améliorant par rapport à celui de l'équilibre de Nash du jeu d'étape, alors la répétition infinie du jeu permet à des joueurs suffisamment patients d'obtenir en moyenne ce paiement à l'équilibre de l'interaction répétée.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

L'idée utilisée dans la démonstration de ce résultat est assez intuitive.

- Notons **a** l'équilibre de Nash du jeu d'étape vérifiant $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u}$.
- Considérons le cas le plus simple, où le paiement réalisable (candidat à l'amélioration paretienne stricte) correspond à un profil stratégique pur $\boldsymbol{a}'$ du jeu d'étape
  - *I.e.*, dont le paiement vérifie $g(\boldsymbol{a}') = \boldsymbol{v}$.
- Il suffit donc de jouer $\boldsymbol{a}'$ à chaque étape pour obtenir $\boldsymbol{v}$ en paiement moyen.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Pour soutenir ce comportement à l'équilibre de l'interaction répétée, l'idée consiste ensuite à sanctionner toute déviation à l'aide de l'équilibre de Nash du jeu d'étape.
- Ce dernier est donc utilisé comme punition irréversible.
- Une telle stratégie est dite de type « grim trigger » (une traduction littérale pourrait être « à gâchette »).

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Formellement, selon cette stratégie, chaque joueur $i \in \mathcal{N}$ adopte le comportement suivant:

  - commencer par jouer a_i';
  - à la période $t > 1$, si le profil d'actions de la période $(t-1)$ est $\boldsymbol{a}'$ alors jouer a_i', et jouer a_i sinon.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Clairement, selon cette stratégie, toute déviation déclenche une punition *ad vitam æternam* qui consiste à répéter l'équilibre de Nash $\mathbf{a}$ du jeu d'étape pour toujours.

- L'adoption par tous les joueurs de cette stratégie constitue un équilibre de l'interaction répétée si chaque joueur $i \in \mathcal{N}$ est suffisamment patient pour préférer percevoir $\mathrm{g_i}(\mathbf{a}') = \boldsymbol{v}_i$ à toutes les étapes plutôt qu'un paiement plus élevé lors d'une étape de déviation puis $\mathrm{g_i}(\mathbf{a}) = \boldsymbol{u}_i$ à jamais ensuite.

- La menace de punition amorcée à l'issue d'une déviation est parfaitement crédible puisqu'elle constitue un équilibre de Nash du jeu d'étape. D'où l'équilibre parfait en sous-jeux.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Dans le cas plus compliqué où le paiement réalisable moyen $\boldsymbol{v}$ ne peut être obtenu à chaque étape à l'aide d'une stratégie pure, la démonstration doit être adaptée.

- Celle-ci procède de même lorsque $\boldsymbol{v}$ correspond au paiement espéré d'une stratégie mixte du jeu d'étape, mais se complexifie lorsque cela n'est pas le cas.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Le Théorème 1 ne nous renseigne aucunement sur la valeur du seuil $\overline{\delta}$.

Q.: Comment varie $\overline{\delta}$ avec:

- le gain de la meilleure déviation unilatérale;
- le gain de la coopération $\mathbf{a}$; et
- le gain de la punition $\mathbf{a}'$?

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

R.:

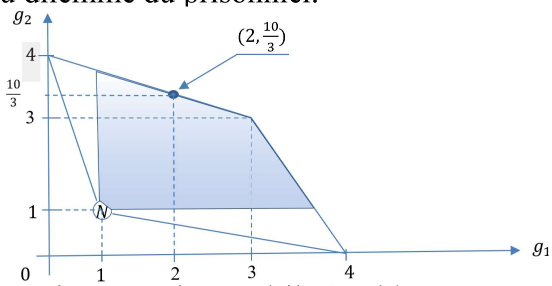
Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Dit autrement, pour que des comportements de coopération puissent être soutenus à l'équilibre, les joueurs doivent être d'autant plus patients que:
  - ils peuvent augmenter leur gain en trahissant les autres; et
  - le paiement de coopération est proche de celui de la punition.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Application du Théorème 1 au dilemme du prisonnier.

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)



- Le Théorème 1 nous assure que l'ensemble des paiements du quadrilatère bleu peuvent être soutenu à l'équilibre.

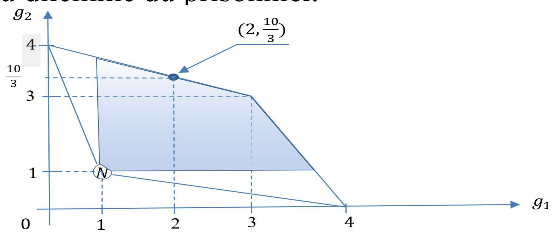
Q.: Proposez une stratégie qui permet d'obtenir le paiement $\left(2, \frac{10}{3}\right)$ en moyenne.

(On ne demande pas de vérifier que cette stratégie soutienne un équilibre)

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Application du Théorème 1 au dilemme du prisonnier.

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)

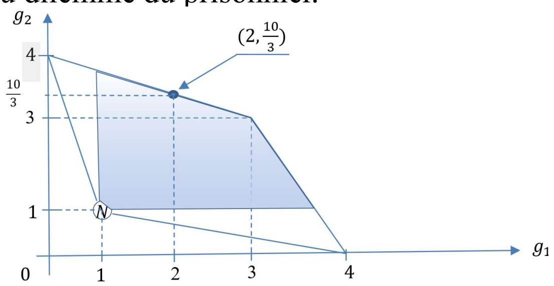


R.:

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Application du Théorème 1 au dilemme du prisonnier.

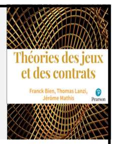
		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)



Q.: Proposez une stratégie qui permet d'obtenir le paiement (2,2) en moyenne.
(On ne demande pas de vérifier que cette stratégie soutienne un équilibre)

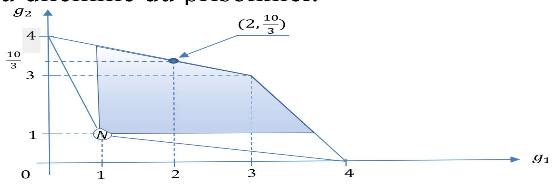
Résultats théoriques

Jeux répétés infinis



Application du Théorème 1 au dilemme du prisonnier.

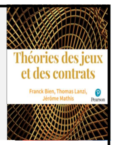
		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_1	(0,4)	(3,3)



R.:

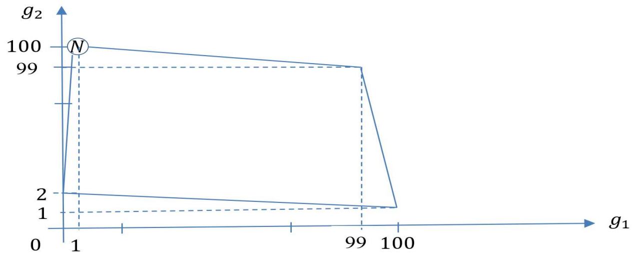
Résultats théoriques

Jeux répétés infinis



Non application du Théorème 1.

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

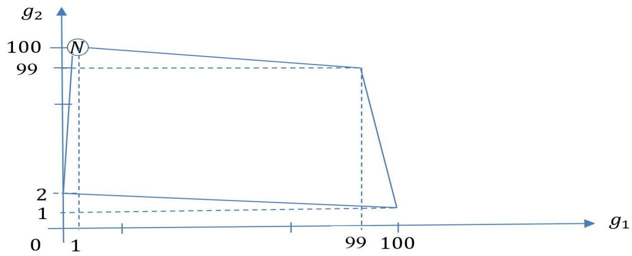


- Ce jeu d'étape possède un unique équilibre de Nash qui est Pareto optimal.
- Il n'y a alors aucun candidat possible $\mathbf{a}'$ qui soit Pareto améliorant (c'est-à-dire capable d'augmenter les paiements de tous les joueurs par rapport au paiement de l'équilibre de Nash **a**).
- Problème: le paiement d'équilibre n'est pas complètement satisfaisant au regard du paiement associé à la paire d'actions (a_1, b_2) qui (est elle aussi Pareto-optimale mais) procure un paiement de 99 à chacun.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Non application du Théorème 1.

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)



- La paire d'actions (a_1, b_2) est-elle soutenable à l'équilibre du jeu répété infini ?
- Notre prochain théorème répond par l'affirmative.
- L'idée est que le joueur 1 peut encourager le joueur 2 à se coordonner sur la paire d'actions (a_1, b_2) en utilisant l'action b_1 comme menace de punition dans le cas de déviation du joueur 2.

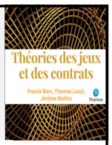
Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

2nd « Folk theorem » : amélioration des paiements individuellement rationnels du jeu d'étape

- Le second folk théorème exploite l'idée selon laquelle, pour inciter à des comportements de coopération, les joueurs peuvent utiliser d'autres punitions que celles de l'équilibre de Nash du jeu d'étape.

- Ces punitions doivent tout de même satisfaire une propriété dite de « valeur minimax ».

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis



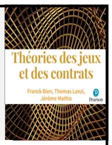
- La *valeur minimax* d'un joueur est la plus petite valeur à laquelle il peut être contraint par les autres joueurs, sachant qu'il conserve une attitude de meilleure réponse.

- C'est-à-dire qu'il s'agit de la pire des punitions infligées à un joueur capable de se défendre de manière optimale.

- Formellement, en notant l'espérance de gain (du joueur i) associée à une stratégie mixte σ comme $E_\sigma[g_i(.)] = g_i(\sigma)$, la valeur minimax du joueur i s'écrit :

$$min_{\sigma_{-i}} max_{\sigma_i} g_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$$

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis



		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

Q.: Déterminez la valeur minimax en stratégies pures du joueur 1.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

R.:

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

<u>Q.:</u> Déterminez la valeur minimax en stratégies mixtes du joueur 1.

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

<u>R.:</u>

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

Q.: Déterminez la valeur minimax (en stratégies mixtes) du joueur 2.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

R.:

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)

Résultats théoriques

Jeux répétés infinis

- Il n'est pas rationnel pour un joueur de se laisser infliger durablement un paiement inférieur à sa valeur minimax.
- Nous disons qu'un vecteur de paiement $(\pi_i)_{i\in\mathcal{N}}$ est ***(strictement) individuellement rationnel pour le joueur*** $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$, si le paiement π_i est (strictement) supérieur à la valeur minimax du joueur i.
- Dans le cas où cette condition est satisfaite pour tout joueur $i \in \mathcal{N}$, on dit simplement que le vecteur de paiement $(\pi_i)_{i\in\mathcal{N}}$ est ***<u>(strictement) individuellement rationnel</u>***.
- De tels paiements Pareto dominent donc (strictement) le profil de paiement qui procure à chaque joueur sa valeur minimax.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Une dernière notion dont nous avons besoin avant d'énoncer le théorème qui nous intéresse renvoie à des possibilités de punitions appropriées dans un cadre à trois joueurs ou plus.
- L'idée est que les joueurs ont la possibilité d'infliger une punition à l'un des leurs, sans toutefois punir excessivement d'autres joueurs qui n'auraient pas dévié du chemin d'équilibre.
- Plus précisément, le jeu doit permettre de récompenser, au moins à la marge, les joueurs qui infligent la sanction, sans quoi la punition est elle-même sujette à des déviations profitables.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

- Pour cela, nous dirons que les joueurs n'ont pas d'*intérêts identiques*, si aucun joueur n'a de paiements qui peuvent s'écrire comme simple transformation affine positive de ceux d'un autre joueur.
- Formellement, les joueurs n'ont pas d'*intérêts identiques* si pour tout $i, j \in \mathcal{N}$ il n'existe pas deux constantes α et β, avec $\alpha > 0$, telles que $g_i(.) = \alpha g_j(.) + \beta$.
- Un contre-exemple sera donné plus loin.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

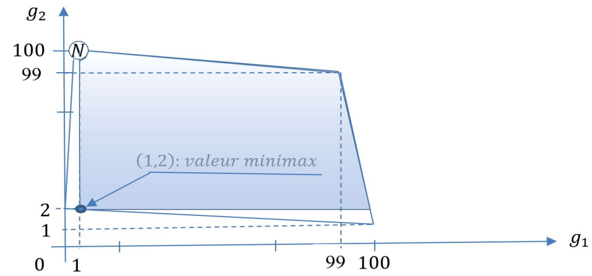
Théorème 2 (Fudenberg et Maskin, 1986). *Supposons que le jeu d'étape G comprends 2 joueurs (N = 2) ; ou davantage* ($N \geq 3$), *mais qu'aucuns joueurs n'ont d'intérêts identiques.*

Lorsque G est répété de manière infinie, tout paiement du jeu d'étape à la fois réalisable et strictement individuellement rationnel peut être soutenu, le long d'un chemin d'équilibre parfait en sous-jeux, comme paiement moyen du jeu répété lorsque le facteur d'escompte de chaque joueur est suffisamment proche de 1.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Application du Théorème 2.

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,100)	(99,99)
	b_1	(0,2)	(100,1)



- Pour soutenir le paiement d'équilibre (99, 99), il suffit de considérer une stratégie de type « grim trigger » selon laquelle chaque joueur $i \in \{1,2\}$:
  - commence par jouer l'action a_1 si $i = 1$ (resp. b_2 si $i = 2$) ;
  - puis à la période $t > 1$, répète l'action précédente si le profil d'actions de la période $(t-1)$ est (a_1, b_2), et sinon joue b_1 si $i = 1$ (resp. a_2 si $i = 2$).

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Non application du Théorème 2.

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	(1,0)	(1,1)
	b_1	(0,0)	(0,0)

- L'ensemble des paiements strictement individuellement rationnels de ce jeu d'étape est vide.
- La valeur minimax du joueur 1 est 1, et celle du joueur 2 est 0.
- Il n'y a donc pas de paiement strictement individuellement rationnel.
- Le jeu répété infini possède un unique paiement d'équilibre parfait en sous-jeux et celui-ci vaut (1,1).

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Jeu d'étape à trois joueurs avec intérêt identiques

Joueur 3

$a_3 \leftarrow \quad \rightarrow b_3$

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	1,1,1	0,0,0
	b_1	0,0,0	0,0,0

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	0,0,0	0,0,0
	b_1	0,0,0	1,1,1

- Clairement, la valeur minimax de chaque joueur est zéro.
- Les joueurs 1 et 2 peuvent punir le joueur 3 en jouant la paire (a_1, b_2) ou (b_1, a_2).
  - Avec de telles paires, le choix de la matrice par le joueur 3 ne lui permet pas d'atteindre un paiement strictement positif.
- De même, les joueurs 2 et 3 (resp. 1 et 3) peuvent punir le joueur 1 (resp. 2) en jouant la paire (a_2, b_3) ou (b_2, a_3) (resp. (b_1, a_3) ou (a_1, b_3)).

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Jeu d'étape à trois joueurs avec intérêt identiques

Joueur 3 : a_3

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	1,1,1	0,0,0
	b_1	0,0,0	0,0,0

Joueur 3 : b_3

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	0,0,0	0,0,0
	b_1	0,0,0	1,1,1

- Or ces actions de punitions ne peuvent être jouées conjointement.
  - Elles sont mutuellement exclusives puisqu'il n'existe pas de triplets (x_1, x_2, x_3) tels que :
    - la paire (x_2, x_3) inflige au joueur 1 sa valeur minimax ;
    - (x_1, x_3) inflige au joueur 2 sa valeur minimax ; et
    - (x_1, x_2) inflige au joueur 3 sa valeur minimax.

Résultats théoriques
Jeux répétés infinis

Jeu d'étape à trois joueurs avec intérêt identiques

Joueur 3 : a_3

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	1,1,1	0,0,0
	b_1	0,0,0	0,0,0

Joueur 3 : b_3

		Joueur 2	
		a_2	b_2
Joueur 1	a_1	0,0,0	0,0,0
	b_1	0,0,0	1,1,1

- En particulier, partant de $x_1 = a_1$, infliger une punition au joueur 3 requiert $x_2 = b_2$, ce qui implique de sélectionner tout à la fois $x_3 = a_3$ pour punir le joueur 1 et $x_3 = b_3$ pour punir le joueur 2, ce qui est impossible. On obtient une contradiction similaire en partant de $x_1 = b_1$.
- On peut montrer qu'il n'existe aucun équilibre parfait en sous-jeux qui procure un paiement moyen inférieur à ¼ quand bien même ce paiement peut être obtenu dans le jeu d'étape à l'aide de stratégies mixtes (voir Fudenberg et Maskin (1986), page 543).

Jeux répétés
Plan

- **Introduction**
  - La résolution du dilemme du prisonnier
  - Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois
  - Qu'est-ce qu'un jeu répété un nombre infini de fois ?
- **Construction du jeu répété**
  - Jeu d'étape
  - Répétition du jeu d'étape
  - Stratégies du jeu répété
  - Paiement escompté
  - Concept de solution
- **Résultats théoriques**
  - Principe de déviation en un coup
  - Jeux répétés finis
  - Jeux répétés infinis
- **Application à l'économie industrielle**
  - Collusion en prix au sein d'un duopole

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

Concurrence à la Bertrand répétée

- $\mathcal{N} = \{1,2\}$
- $S_i = \mathbb{R}_+, i \in \mathcal{N}$
- Firmes identiques (même facteur d'escompte δ, même coût marginal constant c,…)
- Le jeu est répété T fois.
  - À la période $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, lorsque le duopole opte pour une paire de prix $(p_{i,t}, p_{j,t}) \in \mathbb{R}_+^2$, on note $\pi_i(p_{i,t}, p_{j,t})$ le profit de l'entreprise i.
- Sur le long terme, la valeur actualisée des profits de l'entreprise i s'écrit :

$$\sum^{T} \delta^{t-1} \pi_i(p_{i,t}, p_{j,t})$$

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- À la date t, l'histoire des actions passées s'écrit

$$H_t = \left((p_{1,1}, p_{2,1}); (p_{1,2}, p_{2,2}); \dots; (p_{1,t-1}, p_{2,t-1})\right) \in \mathbb{R}_+^{2(t-1)}$$

- Chaque histoire H_t définie un nouveau jeu $G(H_t)$ qui démarre en H_t.
- La stratégie (pure) de l'entreprise i est une fonction

$$\sigma_{i,t} : \mathbb{R}_+^{2(t-1)} \to \mathbb{R}_+$$
$$H_t \to \sigma_{i,t}(H_t) = p_{i,t}$$

- Le profil stratégique $(\sigma_{i,t}, \sigma_{j,t})_{t\in\{1,2,\dots,T\}}$ est un équilibre parfait en sous-jeux si pour toute histoire H_t, le profil stratégique $(\sigma_{i,t}(H_t), \sigma_{j,t}(H_t))_{t\in\{1,2,\dots,T\}}$ est un équilibre de Nash du jeu $G(H_t)$.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

<u>Résultat:</u> Absence de collusion en prix lorsque l'interaction est finie

- Supposons que T est fini.
- Méthode d'induction à rebours.
  - À la dernière période du jeu, les actions passées n'ont aucun impact sur le profit de dernière période.
    - chaque firme $i \in \{1,2\}$ tente de maximiser son profit « statique » $\pi_i\left(p_{i,T}, p_{j,T}\right)$ étant donné le prix de son concurrent $p_{j,T}$.
    - chaque entreprise pratique un prix qui égalise le coût marginal de production.
  - À l'avant-dernière période, tout se passe comme s'il s'agissait de la dernière période, car les profits futurs (ceux de la dernière période) ne dépendent pas, en vertu du raisonnement qui précède, de l'histoire des coups passés.
  - Il n'y a donc de collusion en prix à aucune période.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

<u>Résultat:</u> Collusion en prix lorsque l'interaction est infinie

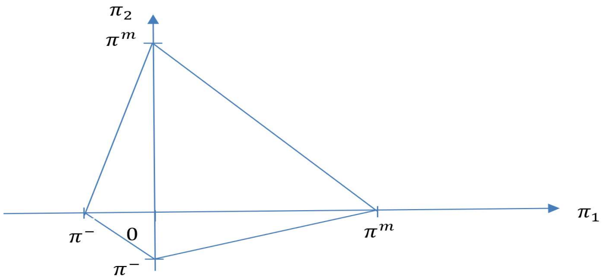
- Supposons que T est infini.
- Méthode d'induction à rebours ne s'applique plus.
- Appliquons nos deux folk théorèmes.
- L'ensemble des paiements réalisables est donné par l'enveloppe convexe des paiements du jeu d'étape.
- Le profit maximum qu'une firme peut obtenir dans le jeu d'étape est ce que nous appelons le profit de monopole, noté π^m.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- Le profit minimum qu'une firme peut obtenir dans le jeu d'étape est négatif, et est noté π^-.
  - Il correspond à une couverture maximale du marché pour un prix de vente nul.
  - La perte par unité vendue est celle du coût de production, identifié ici par le coût marginal c.
  - Ce profit a donc pour valeur le coût de production marginale multiplié par la taille de la demande lorsque le bien est distribué gratuitement.
  - Il ne dépend pas du prix pratiqué par la concurrence, à condition que ce prix reste positif de sorte que le bien ne soit distribué gratuitement que par une seule firme qui couvre tout le marché.
  - La concurrence réalise alors un profit nul.
  - On a $\pi^- = \pi_i(p_i = 0, p_j > 0)$, avec $i, j \in \{1,2\}$.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- L'ensemble des paiements réalisables illustré dans le repère (π_1, π_2), inclut le quadrilatère reliant les quatre paires de paiements $(\pi^m, 0)$, $(\pi^-, 0)$, $(0, \pi^m)$, et $(0, \pi^-)$.



- Par ailleurs, il n'y a pas de paiements réalisables en-dehors de ce quadrilatère puisque pour tout profit de marché $\pi \in [\pi^-, \pi^m]$, le vecteur de paiement du duopole s'écrit soit $(\pi, 0)$ ou $(\pi, 0)$ selon l'identité de la firme qui couvre de manière exclusive le marché, soit $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dans le cas d'une couverture commune, ce qui correspond à une combinaison convexe des deux paiements de couverture exclusive.

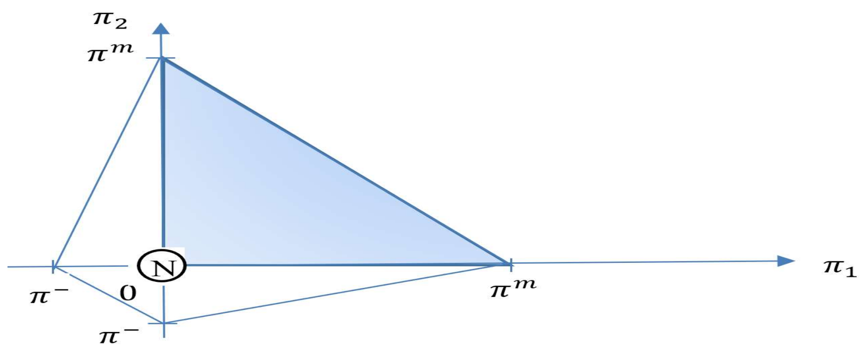
Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

Application du Théorème 1

- Le jeu d'étape possède un unique équilibre de Nash: les deux entreprises tarifent au niveau de leur coût marginal de production, supposé identique.
- A l'équilibre du jeu d'étape les profits sont nuls pour chaque entreprise (paradoxe de Bertrand).
- Soit $\mathbf{a}' = (a_1', a_2')$ un profil stratégique qui procure un profit espéré strictement positif à chaque firme.
  - Par exemple, $\mathbf{a}'$ correspond à une collusion à tarification symétrique, qui prend la forme d'une paire d'actions $(p_1, p_2) = (\bar{p}, \bar{p})$, avec $\bar{p} \in]c, p^m]$, où p^m dénote le prix de monopole.
  - Ou encore, $\mathbf{a}'$ prend la forme d'une loterie contrôlée qui consiste à jouer à pile ou face qui des deux firmes laisse à l'autre une position de monopole lors de la prochaine période, de sorte que le profit espéré de chaque période soit de $\frac{\pi^m}{2}$.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- Par application du Théorème 1, $\exists\, \overline{\delta} \in [0,1]$ au-delà duquel il existe un équilibre parfait en sous-jeux qui consiste à jouer $\mathbf{a}'$ à chaque période le long du chemin d'équilibre.
- Les paiements correspondants sont ceux grisés:



Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- Le plus faible facteur d'escompte $\overline{\delta}$ s'obtient par recours à une stratégie de type «grim trigger » qui utilise une punition maximale en cas de déviation du chemin d'équilibre.
- Cette punition consiste à tarifer au coût marginal de sorte à anéantir toute possibilité de profits positifs dans le futur.
- Dans le cas particulier d'une collusion à tarification symétrique, l'écriture de cette stratégie que l'on compare aux meilleures déviations profitables possibles renvoie à un facteur d'escompte minimal $\overline{\delta} = \frac{1}{2}$ (voir Application numérique 3.8).
- Cette loterie est « contrôlée » dans le sens où le résultat du tirage aléatoire est observé par les deux joueurs, qui décident en conséquence quelle paire d'actions jouer.
  - Le support de cette loterie peut s'écrire $\{(p_1 = p^m, p_2 > p^m); (p_1 > p^m, p_2 = p^m)\}$.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

Application du Théorème 2

- Nous avons d'ores et déjà caractérisé l'ensemble des paiements réalisables.
- Il nous reste à identifier l'ensemble des paiements individuellement rationnels.
- Clairement, la valeur minimax de chaque firme correspond au profit nul.
- L'ensemble de paiements individuellement rationnels correspond donc à tout paiement positif.
- Par application du Théorème 2, lorsque les firmes sont suffisamment patientes (i.e., δ proche de 1) toute paire (π_1, π_2) telle que

$$\pi_1 + \pi_2 \leq \pi^m, \pi_1 > 0 \text{ et } \pi_2 > 0$$

peut être soutenue à l'équilibre (parfait en sous-jeux) comme paire de paiements moyens du jeu répété.

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- Il n'est pas surprenant que les Théorèmes 1 et 2 produisent ici les mêmes résultats.
  - Car le paiement de l'unique équilibre de Nash du jeu d'étape correspond à la valeur minimax de chaque firme.
  - C'est-à-dire que ces deux théorèmes formulent des possibilités d'amélioration de paiements à l'équilibre par rapport à deux points de référence qui dans ce cas précis concordent :
    - paiement nul de l'équilibre de Nash pour le Théorème 1; et
    - paiement nul de la valeur minimax pour le Théorème 2.

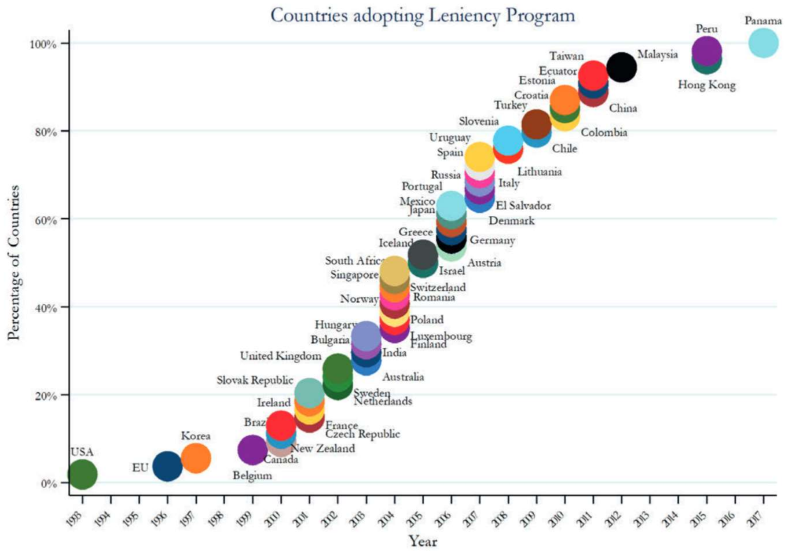
Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- Leniency program
  - In markets where there are a small number of firms, numerous case of agreement on prices.
  - This is illegal.
  - Cases are often investigated by antitrust authorities who want to promote competition.
  - The "lysine price-fixing conspiracy" was an organized effort during the mid-1990s to raise the price of the animal feed additive Lysine.
    - Cartel including an american firm, two japenese and two Korean
    - Goal was to meet to agree on prices: they were able to raise prices by 70% during the last year of cooperation ,
    - Investigation lead to $105 million in fines and three year sentence for executive of American firm

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

- The lysine cartel was the first successful prosecution of an international cartel by the U.S. Department of Justice in more than 40 years.
  - Since then, the DoJ has discovered and prosecuted scores of international cartels.
- How did the U.S. Department of Justice succeed?
- Cartel was denounced by the manager of the american firm under leniency program
  - The idea of the leniency program is that the first informant does not get a fine whereas later one get full penalty (in the US)
  - This case inspired film "The informant".

Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole



Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole

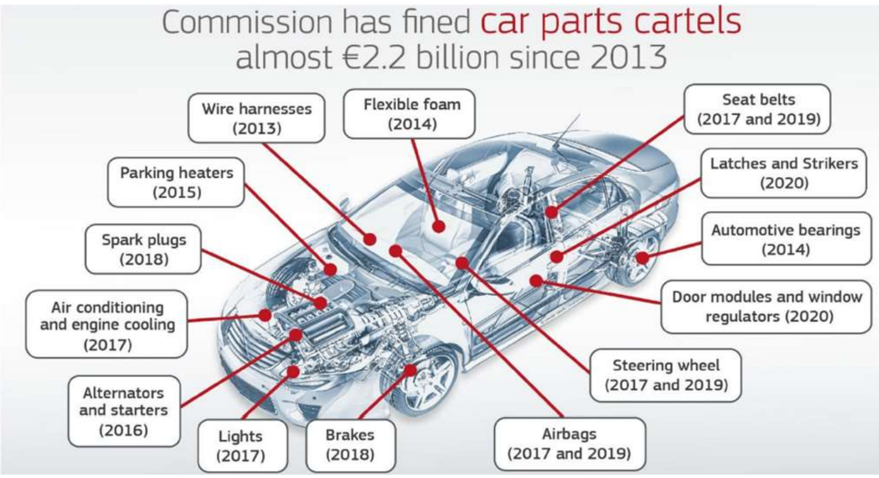
- Examples of Duopoly Collusion in Prices
- MasterCard/Visa
  - Interchange Fee U.S. Litigation: $5.6 Billion Settlement
  - Visa and Mastercard faced allegations of breaching antitrust laws by imposing high interchange fees on merchants from January 1, 2004, to January 25, 2019.

Application à l’économie industrielle
Collusion en prix au sein d’un duopole

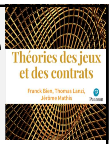
- Collusive tendering
- Construction Contracts: Collusive tendering occurs in competitive bidding for public construction contracts.
  - Rival firms may set artificially high prices to allow a preferred firm to win with a relatively high contract offer.

Application à l’économie industrielle
Collusion en prix au sein d’un duopole

- Industry wide example of cartel (non necessary on prices)



Application à l'économie industrielle
Collusion en prix au sein d'un duopole



- Industry wide example of cartel (non necessary on prices)

Car parts	Fine imposed in €
Wire harnesses (2013)	141 791 000
Flexible foam (2014)	114 077 000
Automotive bearings (2014)	953 306 000
Parking heaters (2015)	68 175 000
Alternators and starters (2016)	137 789 000
Air conditioning and engine cooling (2017)	155 575 000
Seat belts, airbags and steering wheels (2017/2019)	402 288 000
Lights (2017)	26 744 000
Brakes (2018)	75 426 000
Spark plugs (2018)	76 099 000
Latches and strikers Door modules and window regulators (2020)	18 196 000
Total	**2 169 466 000**