Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

Game Theory
with Economic and Finance Applications

Chapitre 4: JEUX BAYÉSIENS

Jérôme MATHIS (LEDa)

Diapositives tirées du livre

« **Théorie des jeux et contrats** »

Auteurs:

Franck Bien, Thomas Lanzi et Jérôme Mathis

Édition: Pearson

Plan

Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Plan

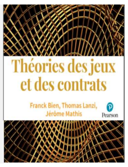
Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

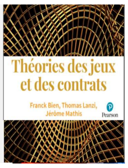
Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif



		Firme 2 type connexe		Firme 2 type non connexe	
		G	D	G	D
Firme 1	H	(4,2)	(0,0)	(4,0)	(0,4)
	B	(0,0)	(2,4)	(0,2)	(2,0)

- $p \in [0,1]$: probabilité que la firme 2 soit de type « connexe ».
- Une stratégie pour la firme 2 définit un couple d'action pour chacun de ses types.
  - E.g., (G,G), (G,D), (D,G) et (D,D), avec la première (resp. seconde) coordonnée de chaque paire désignant l'action retenue par la firme 2 lorsque son type est connexe (resp. non connexe).

Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif



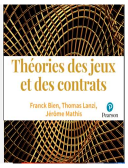
		Firme 2 type connexe		Firme 2 type non connexe	
		G	D	G	D
Firme 1	H	(4,2)	(0,0)	(4,0)	(0,4)
	B	(0,0)	(2,4)	(0,2)	(2,0)

Les ensembles de meilleures réponses du joueur 2 s'écrivent:

$$\begin{cases} MR_2(H) = \{(G,D)\} \\ MR_2(B) = \{(D,G)\} \end{cases}$$

Ainsi, un équilibre de Nash en stratégies pures de ce jeu ne peut être soutenu que par les stratégies (G,D) et (D,G) de la firme 2.

Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif



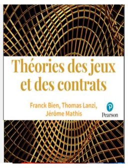
Espérance de gain de la firme 1:

		Firme 2			
		(G,G)	(G,D)	(D,G)	(D,D)
Firme 1	H	4	$4p$	$4(1-p)$	0
	B	0	$2(1-p)$	$2p$	2

Face à (G,D) la meilleure réponse de la firme 1:

- $H \in MR_1(G,D) \Leftrightarrow 4p \geq 2(1-p) \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{3}$
- $B \in MR_1(G,D) \Leftrightarrow 4p \leq 2(1-p) \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{3}$

Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif

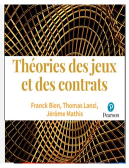


		Firme 2			
		(G,G)	(G,D)	(D,G)	(D,D)
Firme 1	H	4	$4p$	$4(1-p)$	0
	B	0	$2(1-p)$	$2p$	2

D'où

$$MR_1(G,D) = \begin{cases} \{H\} \text{ si } p > \frac{1}{3}\ ; \\ \{H,B\} \text{ si } p = \frac{1}{3};\ et \\ \{B\} \text{ si } p < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif

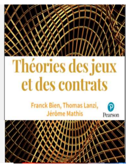


		Firme 2			
		(G,G)	(G,D)	(D,G)	(D,D)
Firme 1	H	4	$4p$	$4(1-p)$	0
	B	0	$2(1-p)$	$2p$	2

Face à (D,G) la meilleure réponse de la firme 1:

$$MR_1(D,G) = \begin{cases} \{H\} \text{ si } 4(1-p) > 2p; \\ \{H,B\} \text{ si } 4(1-p) = 2p; et \\ \{B\} \text{ si } 4(1-p) < 2p \end{cases} = \begin{cases} \{H\} \text{ si } p < \frac{2}{3}\ ; \\ \{H,B\} \text{ si } p = \frac{2}{3}\ ; et \\ \{B\} \text{ si } p > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif



		Firme 2			
		(G,G)	(G,D)	(D,G)	(D,D)
Firme 1	H	4	$4p$	$4(1-p)$	0
	B	0	$2(1-p)$	$2p$	2

A présent, il nous faut distinguer suivant les valeurs de $p \in [0,1]$.

Lorsque $p < \frac{1}{3}$, on a

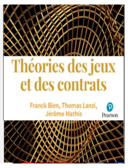
$$MR_1(G,D) = \{B\} \text{ et } MR_1(D,G) = \{H\}$$

$$MR_2(H) = \{(G,D)\} \text{ et } MR_2(B) = \{(D,G)\}$$

Donc aucun équilibre de Nash en stratégies pures.

Jeux bayésiens statiques

Exemple introductif



		Firme 2			
		(G,G)	(G,D)	(D,G)	(D,D)
Firme 1	H	4	$4p$	$4(1-p)$	0
	B	0	$2(1-p)$	$2p$	2

Lorsque $p \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, on a

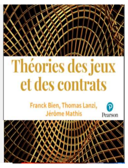
$$MR_1(G,D) = \{H\} \text{ et } MR_1(D,G) = \{H\}$$

$$MR_2(H) = \{(G,D)\}\ et\ MR_2(B) = \{(D,G)\}$$

Donc $\big(H,(G,D)\big)$ est l'unique équilibre de Nash en stratégies pures.

Jeux bayésiens statiques

Exemple introductif



		Firme 2			
		(G,G)	(G,D)	(D,G)	(D,D)
Firme 1	H	4	$4p$	$4(1-p)$	0
	B	0	$2(1-p)$	$2p$	2

Lorsque $p \geq \frac{2}{3}$, on a $MR_1(G,D) = \{H\}\ et\ \ MR_1(D,G) = \begin{cases} \{H,B\} \text{ si } p = \frac{2}{3}\ ;et \\ \{B\} \text{ si } p > \frac{2}{3}. \end{cases}$

$$MR_2(H) = \{(G,D)\}\ et\ MR_2(B) = \{(D,G)\}$$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures s'écrit: $\big\{\big(H,(G,D)\big),\big(B,(D,G)\big)\big\}$.

Jeux bayésiens statiques
Exemple introductif

- Cet exemple illustre comment un équilibre de Nash dans un jeu bayésien peut varier avec la distribution de probabilités (ici $p \in [0,1]$) définie sur l'ensemble des types (ici ceux de la firme 2).

- Par la suite, nous étudierons le concept de solution approprié à cette classe de jeux: l'*équilibre Bayésien*
  - Celui-ci repose sur une articulation cohérente entre les stratégies et les croyances (définies par des distributions de probabilités).

Plan

Jeux bayésiens statiques
- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques
- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens statiques
Modèle

Un *jeu bayésien simultané* représente une interaction stratégique simultanée entre N joueurs, qui s'écrit

$$G =< \mathcal{N}, S, \Theta, (p_i)_{i\in\mathcal{N}}, (g_i)_{i\in\mathcal{N}} >$$

avec :

- $\mathcal{N} = \{1,2, \dots, N\}$ l'ensemble des N joueurs ;

- $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$, où S_i désigne l'ensemble des stratégies pures (ou actions possibles) du joueur $i \in \mathcal{N}$;

- $\Theta = \prod_{i=1}^{N} \Theta_i$, où Θ_i désigne l'ensemble des types du joueur $i \in \mathcal{N}$;

Jeux bayésiens statiques
Modèle

$$G =< \mathcal{N}, S, \Theta, (p_i)_{i\in\mathcal{N}}, (g_i)_{i\in\mathcal{N}} >$$

- $p_i(.)$ une distribution de probabilité que le joueur $i \in \mathcal{N}$ assigne aux types des autres joueurs sachant son information privé.

$$\begin{aligned} p_i : \Theta_i &\to \Delta(\Theta_{-i}) \\ \theta_i &\to p_i(\theta_{-i}|\theta_i) \end{aligned}$$

où le simplexe $\Delta(\Theta_{-i})$ désigne l'ensemble des loteries sur le type des autres joueurs θ_{-i}.

Jeux bayésiens statiques
Modèle

$$G =< \mathcal{N}, S, \Theta, (p_i)_{i\in\mathcal{N}}, (g_i)_{i\in\mathcal{N}} >$$

- $g_i(.)$ la fonction de gains (ou d'utilité) du joueur $i \in \mathcal{N}$.

$$g_i: S \times \Theta \to \mathbb{R}$$
$$(s, \theta) \to g_i(s, \theta)$$

On dit que le jeu G est *fini* lorsque les ensembles $\mathcal{N}, S$ et Θ sont finis.

Dans la suite, nous restreignons l'analyse aux jeux finis.

Jeux bayésiens statiques
Modèle

- Dans la suite, on suppose qu'il est connaissance commune à tous les joueurs que le profil de types réalisé θ est *a priori* tiré selon une certaine distribution $p(\theta)$.

- Cette distribution est utilisée pour déterminer la croyance *a posteriori* du joueur i à partir d'un calcul de probabilité conditionnelle.

- Ainsi, la croyance $p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ du joueur i est supposée ne dépendre que de son information privée θ_i (mais pas de son identité i), et s'écrit $p(\theta_{-i}|\theta_i)$.

Plan

Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens statiques

Information incomplète ou imparfaite ?

- Dans les *jeux à information incomplète*, il existe au moins un joueur i dont une caractéristique pertinente pour le jeu reste inobservée par un (ou plusieurs) autre(s) joueur(s).
  - Cette caractéristique de l'interaction (joueurs, actions disponibles ou paiements) constitue alors une information privée du joueur i.

- Dans les *jeux à information imparfaite*, au moins un joueur i ne possède qu'une connaissance imparfaite de l'histoire du jeu.

- Un jeu à information incomplète peut être transformé en un jeu à information imparfaite.

Jeux bayésiens statiques
Information incomplète ou imparfaite ?

- En introduisant un joueur fictif, la Nature, l'approche à la Harsanyi (1967-1968) transforme une situation de **jeu statique à information incomplète** en un **jeu dynamique à information imparfaite.**

  - En effet, lorsque la nature sélectionne de manière aléatoire le type (ou la caractéristique) θ_i du joueur i, les autres joueurs $-i$ n'observent pas ce choix.

  - Ils ne connaissent donc pas la totalité de l'histoire du jeu, ce qui en fait un jeu à information imparfaite.

Jeux bayésiens statiques
Information incomplète ou imparfaite ?

- Cette transformation permet d'appliquer l'équilibre de Nash comme concept de solution au nouveau jeu obtenu.

- Il nous faut toutefois redéfinir les stratégies et les paiements, ainsi que veiller à la cohérence des croyances *a posteriori*.

Plan

Jeux bayésiens statiques
- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques
- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens statiques
Calcul des croyances a posteriori

Sachant son type θ_i (en supposant $p(\theta_i) \neq 0$), la formule de révision des croyances s'écrit :

$$p(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{p\big((\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)\big)}{p(\theta_i)} = \frac{p(\theta_{-i} \cap \theta_i)}{p(\theta_i)}$$

De

$$p(\theta_i) = p\left(\cup_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} (\theta_{-i} \cap \theta_i)\right) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} \cap \theta_i)$$

et de

$$p(\theta_{-i} \cap \theta_i) = p(\theta_i|\theta_{-i}) p(\theta_{-i})$$

Jeux bayésiens statiques
Calcul des croyances a posteriori

le théorème de Bayes conduit à la formule suivante de révision (dites « bayésienne ») des croyances:

$$p(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{p(\theta_i|\theta_{-i})p(\theta_{-i})}{\sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} p(\theta_i|\theta_{-i})p(\theta_{-i})}$$

Jeux bayésiens statiques
Calcul des croyances a posteriori

Example:

		Firme 2		Probabilités marginales
		$\theta_2 = \underline{c}$	$\theta_2 = \bar{c}$	
Firme 1	$\theta_1 = \underline{c}$	0,4	0,2	$\Pr(\theta_1 = \underline{c}) = 0{,}6$
	$\theta_1 = \bar{c}$	0,1	0,3	$\Pr(\theta_1 = \bar{c}) = 0{,}4$
Probabilités marginales		$\Pr(\theta_2 = \underline{c}) = 0{,}5$	$\Pr(\theta_2 = \bar{c}) = 0{,}5$	1

<u>**Q.:**</u> Que valent $\Pr(\theta_2 = \underline{c}|\theta_1 = \underline{c})$ et $\Pr(\theta_2 = \bar{c}|\theta_1 = \underline{c})$?

Déduisez-en $\Pr\left((\theta_2 = \underline{c}) \cup (\theta_2 = \bar{c})|\theta_1 = \underline{c}\right)$.

Jeux bayésiens statiques

Calcul des croyances a posteriori

R.:

Plan

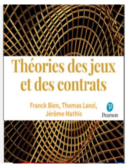
Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens statiques
Stratégies



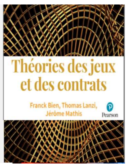
- Dans un jeu bayésien, les stratégies sont contingentes aux types.

  - Dans notre cadre où chaque joueur ne joue qu'une seule fois, une ***stratégie pure*** du joueur i est une application:

$$
\begin{aligned}
s_i : \Theta_i &\rightarrow A_i \\
\theta_i &\rightarrow s_i(\theta_i)
\end{aligned}
$$

  où A_i désigne l'ensemble des actions.

Jeux bayésiens statiques
Stratégies



  - De même, une ***stratégie mixte*** du joueur i prend la forme d'une application

$$
\begin{aligned}
\sigma_i : \Theta_i &\rightarrow \Delta(S_i) \\
\theta_i &\rightarrow \sigma_i(\theta_i)
\end{aligned}
$$

  Où le simplexe $\Delta(S_i)$ désigne l'ensemble des loteries sur l'ensemble des stratégies pures S_i.

Plan

Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens statiques

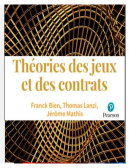
Concept de solution: l'équilibre Bayésien

Un profil stratégique $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_N^*)$ est un ***équilibre Bayésien*** si pour tout joueur $i \in \{1,2,\dots,N\}$, tout type $\theta_i \in \Theta_i$, et toute stratégie σ_i', on a

$$E_{(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)}\left[g_i(.)|\theta_i\right] \geq E_{(\sigma_i', \sigma_{-i}^*)}\left[g_i(.)|\theta_i\right]$$

où $E_{(\sigma_i, \sigma_{-i})}\left[g_i(.)|\theta_i\right]$ désigne l'espérance de gain qui s'écrit comme ci-après.

Jeux bayésiens statiques
Concept de solution : l'équilibre Bayésien

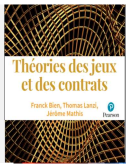


$$E_{(\sigma_i,\sigma_{-i})}\,[g_i(.)|\theta_i] =$$

$$\sum_{\theta_{-i}} p(\theta_{-i}|\theta_i) \sum_{s_j \in S_j} \prod_{j \in \mathcal{N}} \sigma_j(s_j|\theta_j)\, g_i(s_1(\theta_1), s_2(\theta_2), \ldots, s_N(\theta_N), \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$$

avec $\sigma_j(s_j|\theta_j)$ la probabilité avec laquelle le joueur $j \in \mathcal{N}$ sélectionne la stratégie pure s_j lorsqu'il adopte la stratégie mixte σ_j et que son type est θ_j.

Jeux bayésiens statiques
Concept de solution : l'équilibre Bayésien



Dans le cas particulier d'un profil de stratégies pures, l'espérance de gain $E_{(s_i,s_{-i})}\,[g_i(.)|\theta_i]$ s'écrit simplement

$$\sum_{\theta_{-i}} p(\theta_{-i}|\theta_i)\, g_i(s_1(\theta_1), s_2(\theta_2), \ldots, s_N(\theta_N), \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$$

où $s_j(\theta_j)$ désigne l'action du joueur $j \in \mathcal{N}$ sous la stratégie s_j lorsque son type est θ_j.

Jeux bayésiens statiques
Concept de solution : l'équilibre Bayésien

- A l'instar de l'équilibre de Nash, l'équilibre Bayésien désigne un profil stratégique pour lequel il n'y a pas de déviation unilatérale profitable.

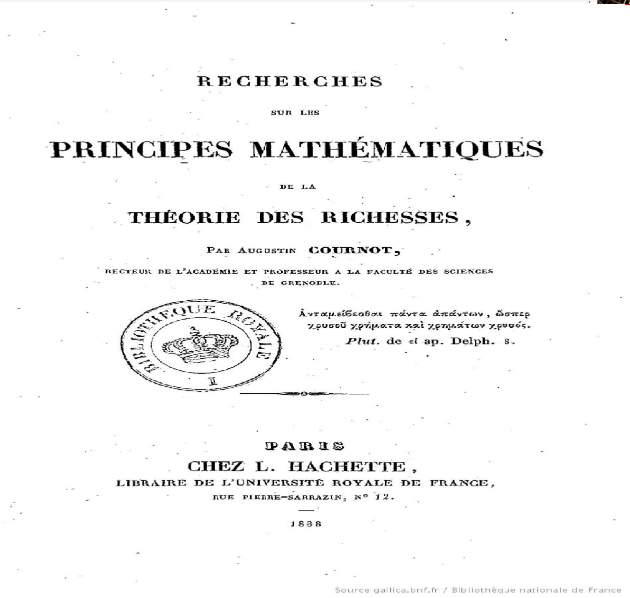
- Dans le cadre d'un jeu Bayésien, cette maximisation résulte d'un paiement espéré calculé selon une distribution de probabilité conditionnelle au type réalisé.

Plan

Jeux bayésiens statiques
- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques
- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot


RECHERCHES
SUR LES
PRINCIPES MATHÉMATIQUES
DE LA
THÉORIE DES RICHESSES,
PAR AUGUSTIN COURNOT,
RECTEUR DE L'ACADÉMIE ET PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE GRENOBLE.

BIBLIOTHEQUE ROYALE

Ἀνταμείβεσθαι πάντα ἁπάντων, ὥσπερ
χρυσοῦ χρήματα καὶ χρημάτων χρυσός.
Plut. de εἰ ap. Delph. 8.

PARIS
CHEZ L. HACHETTE,
LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.
1838

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Antoine Augustin Cournot (1801-1877)

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- On considère le Duopole de Cournot à information incomplète d'un côté.

  - le coût unitaire de production de la firme 1 est connaissance commune; et

  - la firme 1 n'observe pas le coût unitaire de production de la firme 2.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

Rappelons les principales hypothèses du modèle de Cournot.

- $\mathcal{N} = \{1,2\}$
- Chaque firme $i \in \{1,2\}$ produit un bien homogène en quantité $q_i \in \mathbb{R}^+$
- La quantité totale produite est notée $q \equiv q_i + q_j$, avec $j \in \{1,2\}, j \neq i$
- Le profit de la firme i s'écrit
$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i P(q_i + q_j) - C_i(q_i)$$
  - où $P(.)$ désigne la fonction de demande inverse du marché; et
  - $C_i(.)$ la fonction de coût de production de la firme i.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

Afin de rendre l'analyse plus explicite, nous supposons que:

- $P(q) = a - bq$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2_+$
- $C_i(q_i) = c_i\, q_i$

D'où l'écriture du profit de la firme $i \in \{1,2\}$ (pour $j \in \{1,2\}, j \neq i$)

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[(a - b(q_i + q_j) - c_i]$$

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- Le coût unitaire de production de la firme 1 est information publique et égal à c_1.

- Le coût unitaire de production de la firme 2 est information privée.

  - il peut être de niveau élevé, c_2^H, avec probabilité α ; ou

  - ou faible, c_2^L, avec probabilité $(1-\alpha)$.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

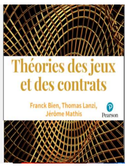
- Le profit de la firme 1 s'écrit :

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1[(a - b(q_1 + q_2) - c_1]$$

- Son profit espéré s'écrit :

$$E\left(\pi_1(q_1, q_2^H, q_2^L)\right)$$
$$= \alpha[a - b(q_1 + q_2^H) - c_1]q_1 + (1-\alpha)[a - b(q_1 + q_2^L) - c_1]q_1$$

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

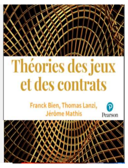


- Le profit de la firme 2 dépend du type de son coût $\theta_2 \in \{H, L\}$. Son profit s'écrit :

$$\pi_2\left(q_1, q_2^{\theta_2}, c_2^{\theta_2}\right) = q_2^{\theta_2}\left[\left(a - b(q_1 + q_2^{\theta_2}\right) - c_2^{\theta_2}\right]$$

où $q_2^{\theta_2}$ désigne le niveau de production de la firme 2 lorsque son coût de production vaut $c_2^{\theta_2}$.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot



- Chaque firme $i \in \{1,2\}$ choisit simultanément un niveau de production q_i^* qui maximise son profit en considérant la production q_j de son concurrent comme donnée.

- Le niveau de production optimale de la firme 1, noté $q_1^*\left(q_2^H, q_2^L\right)$ satisfait:

$$q_1^*\left(q_2^H, q_2^L\right) \in arg \max_{q_1 \in \mathbb{R}^+} E\left(\pi_1\left(q_1, q_2^H, q_2^L\right)\right)$$

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- De même pour la firme 2, on cherche (q_2^{H*}, q_2^{L*}) tels que:

$$q_2^{H*}(q_1, c_2^H) \in arg \max_{q_2^H \in \mathbb{R}^+} \pi_2(q_1, q_2^H, c_2^H)$$

$$q_2^{L*}(q_1, c_2^L) \in arg \max_{q_2^L \in \mathbb{R}^+} \pi_2(q_1, q_2^L, c_2^L)$$

<u>Q.:</u> Que vaut $q_1^*(q_2^H, q_2^L)$?

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

<u>R.:</u>

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- Après réarrangements, nous obtenons la condition de première ordre suivante :

$$[a - 2bq_1 - c_1] - bE(q_2) = 0$$

où $E(q_2) = \alpha q_2^H + (1-\alpha)q_2^L$ désigne l'espérance mathématique de production sur les types de la firme 2.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- On note $FR_1(q_2^H, q_2^L)$ la fonction de réaction de la firme 1 qui à tout niveau d'espérance de production $E(q_2)$ de la concurrence, associe l'unique niveau de production qui maximise les profits de la firme 1.

- On a donc

$$FR_1(q_2^H, q_2^L) = q_1^*(q_2^H, q_2^L)$$

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- De même pour la firme 2, pour $\theta_2 \in \{H, L\}$, la condition de premier ordre s'écrit:

$$\frac{\partial \pi_2\left(q_1, q_2^{\theta_2}, c_2^{\theta_2}\right)}{\partial q_2^{\theta_2}} = a - 2bq_2^{\theta_2} - bq_1 - c_2^{\theta_2} = 0$$

- D'où

$$q_2^{\theta_2 *}\left(q_1, c_2^{\theta_2}\right) = FR_2(q_1, c_2^{\theta_2}) = \frac{a - bq_1 - c_2^{\theta_2}}{2b}$$

- La condition de second ordre est vérifiée par la stricte concavité de la fonction de profit $\pi_2(.)$.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- De $c_2^L < c_2^H$, on a $FR_2\left(q_1, c_2^H\right) < FR_2(q_1, c_2^L)$.

- Dans la suite, nous allons nous intéresser à la fonction $EFR_2(q_1, c_2)$ qui désigne l'espérance de la fonction de réaction de la firme 2, et s'écrit

$$EFR_2(q_1, c_2) = \frac{a - bq_1 - E(c_2)}{2b}$$

où $E(c_2) = \alpha c_2^H + (1 - \alpha)c_2^L$ exprime l'espérance mathématique sur les coûts unitaires de production de la firme 2.

Jeux bayésiens statiques

Application: Duopole de Cournot

- Un équilibre Bayésien est défini par le triplet $\{q_1^*(q_2^{H*}, q_2^{L*}), q_2^{H*}(q_1^*), q_2^{L*}(q_1^*)\}$.
- Il est obtenu par résolution du système suivant:

$$\begin{cases} q_1^*(q_2^H, q_2^L) = \dfrac{a - c_1 - bE(q_2)}{2b} \\ q_2^{H*}(q_1) = \dfrac{a - bq_1 - c_2^H}{2b} \\ q_2^{L*}(q_1) = \dfrac{a - bq_1 - c_2^L}{2b} \end{cases}$$

Jeux bayésiens statiques

Application: Duopole de Cournot

- On sait que

$$E(q_2) = \alpha\left(\frac{a - bq_1 - c_2^H}{2b}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{a - bq_1 - c_2^L}{2b}\right)$$
$$= \frac{a - bq_1 - E(c_2)}{2b}$$

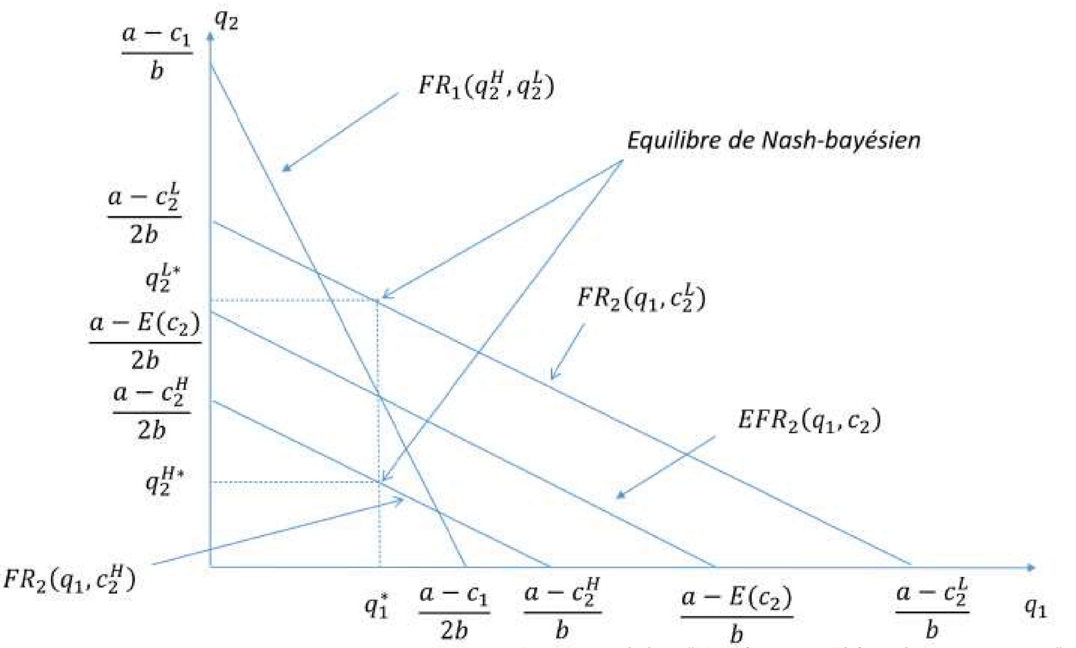
- En utilisant cette expression dans la fonction $q_1^*(q_2^H, q_2^L)$, nous obtenons l'expression de q_1^*.
- Il s'ensuit également les expressions de $q_2^{H*} = q_2^H(q_1^*)$ et $q_2^{L*} = q_2^L(q_1^*)$.

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot

- Après calculs, nous obtenons comme équilibre Bayésien :

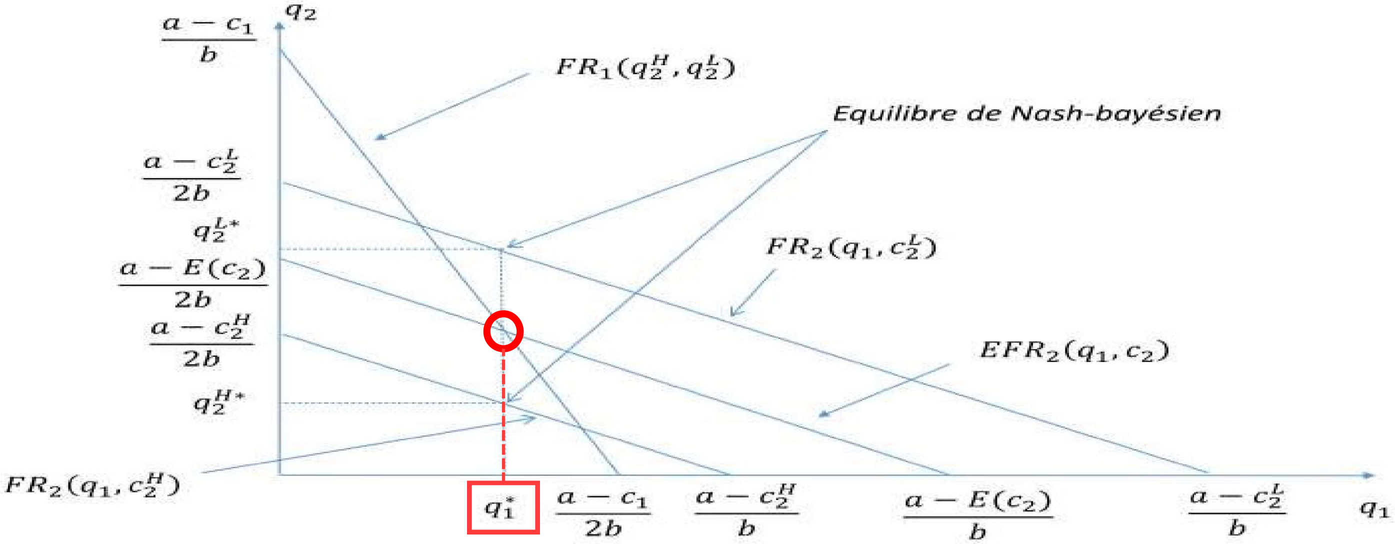
$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - 2c_1 + E(c_2)}{3b} \\ q_2^{H*} = \dfrac{2(a + c_1) - 3c_2^H - E(c_2)}{6b} \\ q_2^{L*} = \dfrac{2(a + c_1) - 3c_2^L - E(c_2)}{6b} \end{cases}$$

Jeux bayésiens statiques
Application: Duopole de Cournot



Jeux bayésiens statiques

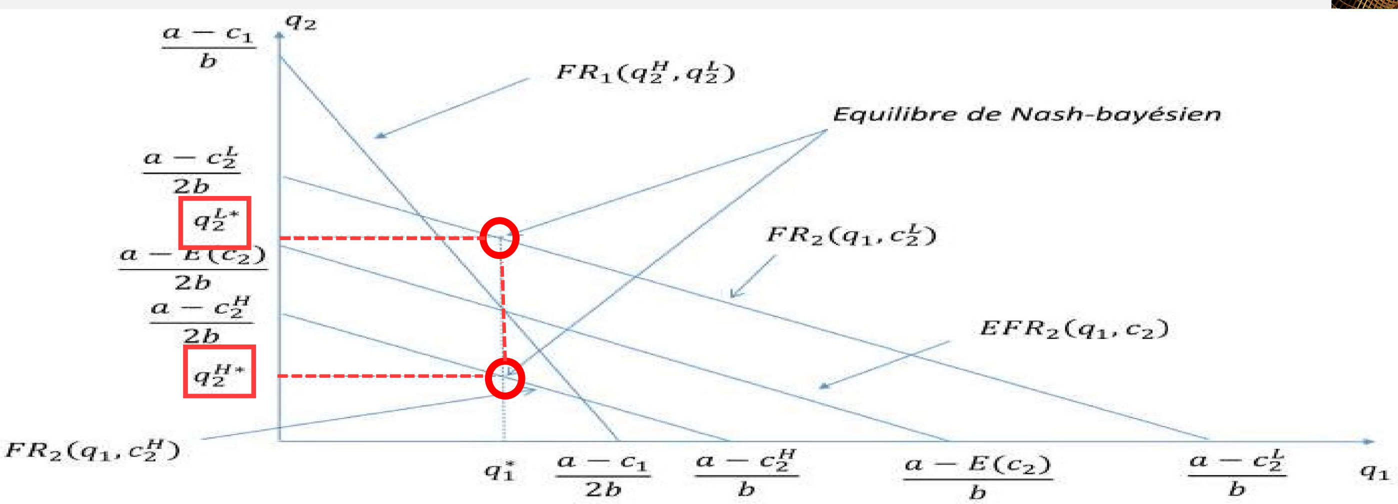
Application: Duopole de Cournot



- L'intersection entre la fonction de réaction $FR_1(q_2^H, q_2^L)$ de la firme 1 et celle $EFR_2(q_1, c_2)$ de la firme 2 détermine le niveau de production optimal q_1^*.

Jeux bayésiens statiques

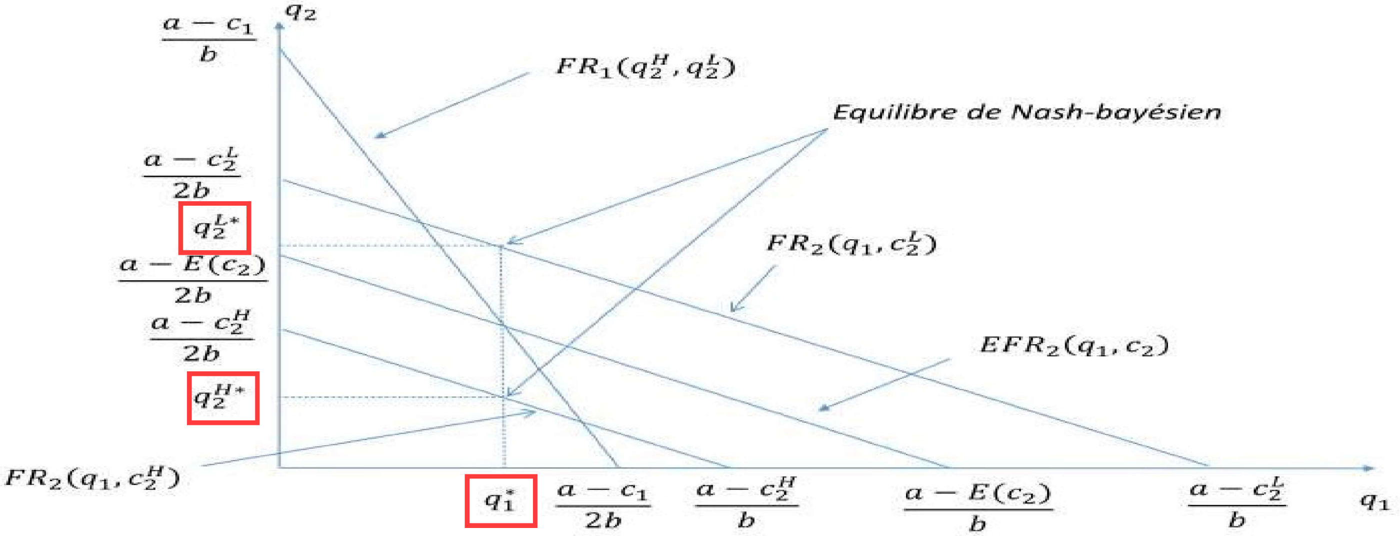
Application: Duopole de Cournot



- Ce niveau de production optimale est ensuite projeté dans les fonctions de réaction $FR_2(q_1, c_2^H)$ et $FR_2(q_1, c_2^L)$ afin de déduire les niveaux de production optimaux q_2^{H*} et q_2^{L*}.

Jeux bayésiens statiques

Application: Duopole de Cournot



- En ces points, aucune des deux firmes n'a intérêt à modifier unilatéralement son niveau de production.

Plan

Jeux bayésiens statiques
- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques
- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Plan

Jeux bayésiens statiques
- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques
- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- Jusqu'à présent, seule l'action retenue par la Nature était inobservée des joueurs.
- Dans certaines situations, les joueurs ont également une incertitude sur les actions précédemment jouées par d'autres joueurs stratégiques.
- Il s'agit de jeux *séquentiels* en information imparfaite.
- Les joueurs en aval ont la possibilité d'extraire de nouvelles informations à partir de l'observation des actions passées en amont.
- Les croyances sont révisées à partir des actions observées, et donc des stratégies.

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- Nouveau concept de solution : l'*équilibre Bayésien parfait* (EBP) repose sur deux exigences :

  - La rationalité séquentielle ; et
  - La cohérence des croyances avec les stratégies.

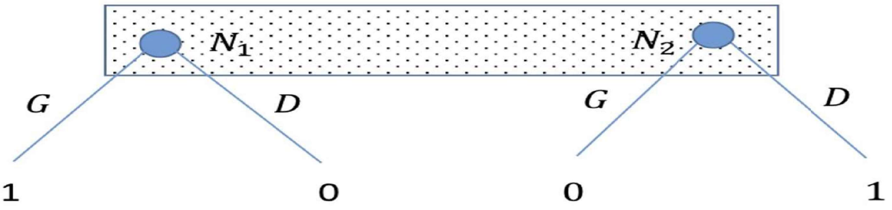
- La rationalité séquentielle: la solution prend la forme d'un profil stratégique formé de meilleures réponses en tout nœud de l'arbre décrivant le jeu (comme l'équilibre parfait en sous-jeux).

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- En information imparfaite, le principe de rationalité séquentielle impose une difficulté additionnelle par rapport aux jeux à information parfaite.

- Celle-ci provient du fait qu'un joueur peut être incapable de distinguer le nœud où il se trouve car il ne sait pas quelles actions ont été jouées au préalable.

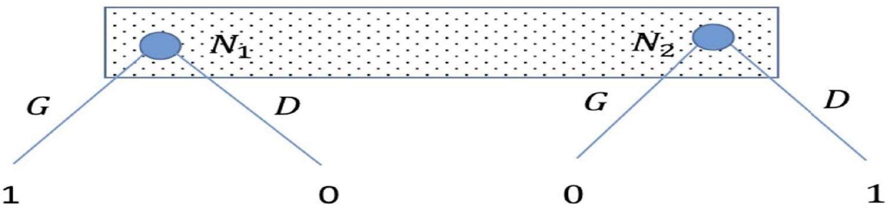
Jeux bayésiens dynamiques
Introduction



- Le groupe de nœuds que le joueur ne parvient pas à dissocier forme ce que l'on appelle un ensemble d'information, qui est ici représenté par la boite contenant les nœuds N_1 ou N_2.

- Comme le joueur est incapable de distinguer s'il est en N_1 ou N_2, il doit jouer la même stratégie en chacun de ces nœuds.

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction



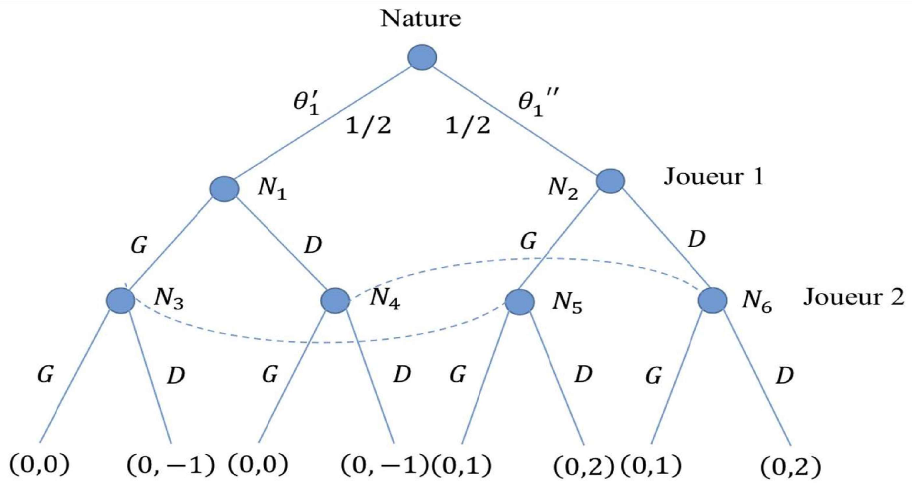
- En particulier, il lui est impossible de jouer à la fois G en N_1 et D en N_2 pour se garantir un paiement de 1.
- Son ensemble de stratégies pures se limite à l'action G en chaque nœud (N_1 et N_2) ou à l'action D en chaque nœud.
- De même, une stratégie mixte consiste à jouer la même loterie en chacun des nœuds N_1 et N_2.

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- <u>La cohérence des croyances avec les stratégies:</u> lorsque la sélection du nœud résulte d'une action passée les croyances doivent être cohérentes avec la stratégie utilisée en amont.

- Il s'agit d'un raffinement par rapport à l'équilibre parfait en sous-jeux.

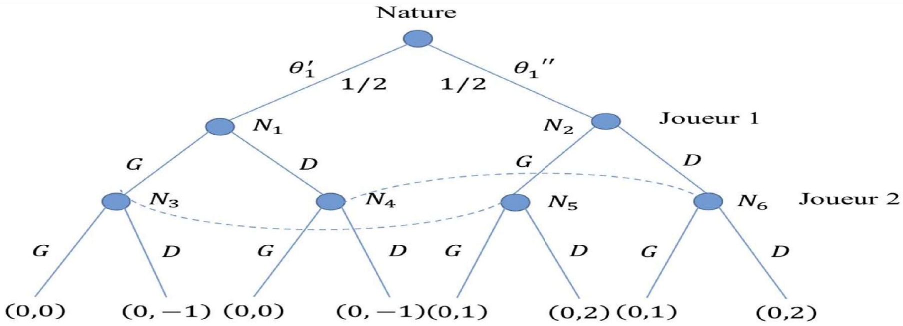
Jeux bayésiens dynamiques
Introduction



- Les deux paires de nœuds (N_3, N_5) et (N_4, N_6) constituent deux ensembles d'information distincts pour le joueur 2, représentés par des traits pointillés.

Jeux bayésiens dynamiques

Introduction

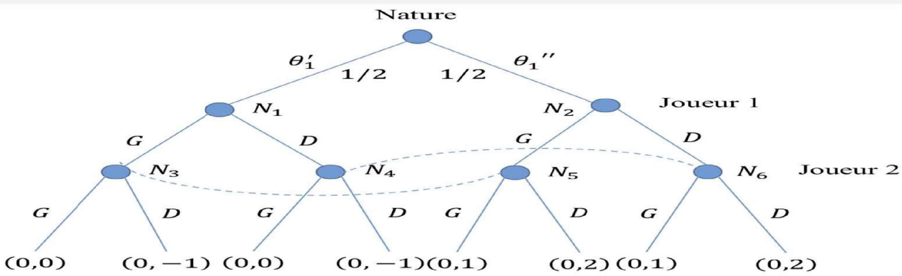


- Ce jeu possède notamment un équilibre de Nash qui consiste:
  - pour le joueur 1 à jouer l'action G avec probabilité $\frac{1}{2}$ (resp. 1)

lorsque son type est θ_1' (resp. θ_1''); et
  - pour le joueur 2 à jouer l'action G en imaginant qu'il est toujours conduit au nœud N_3 (resp. N_4) lorsqu'il observe que le joueur 1 a joué G (resp. D).

Jeux bayésiens dynamiques

Introduction



- Le problème est que la croyance du joueur 2 après observation de l'action G n'est pas cohérente avec le comportement du joueur 1.
- Car compte-tenu de la stratégie du joueur 1, la probabilité que le joueur 2 soit conduit au nœud N_3 après observation de l'action G n'est pas de 1.

<u>Q.:</u> Que vaut $\Pr(N_3|G)$?

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

R.:

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- Les nœuds N_4 et N_6 ne pouvant être atteints que si le joueur 1 joue l'action D, on en déduit:

$$\Pr(N_5|G) = 1 - (\Pr(N_3|G) + \Pr(N_4|G) + \Pr(N_6|G)) = 1 - \Pr(N_3|G) = \frac{2}{3}$$

- Le concept de solution qui nous intéresse élimine donc ce type d'équilibres de Nash qui reposent sur des croyances d'ensemble d'information non cohérentes avec les stratégies.

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- Selon cette croyance, le paiement espéré associé à l'action G est:

$$\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

- et celui associé à l'action D est:

$$\tfrac{1}{3} \times (-1) + \tfrac{2}{3} \times 2 = 1.$$

- Compte tenu de la stratégie du joueur 1, et après observation de l'action G, l'action D est donc l'unique meilleure réponse du joueur 2.

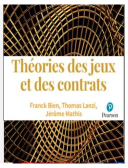
Jeux bayésiens dynamiques
Introduction

- De même, compte tenu de la stratégie du joueur 1, lorsque le joueur 2 observe l'action D, il en déduit qu'il est au nœud N_4 (resp. N_6) avec probabilité 1 (resp. 0).
- On retrouve ce résultat par simple application de la règle de Bayes :

$$\Pr(N_4|D) = \Pr(\theta_1'|D) = \frac{\Pr(\theta_1' \cap D)}{\Pr(D)} = \frac{\Pr(D|\theta_1')\Pr(\theta_1')}{\Pr(D)}$$

$$= \frac{\Pr(D|\theta_1')\Pr(\theta_1')}{\Pr(D|\theta_1')\Pr(\theta_1') + \Pr(D|\theta_1'')\Pr(\theta_1'')} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2}} = 1.$$

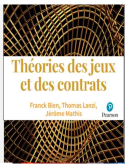
Jeux bayésiens dynamiques
Introduction



- Les nœuds N_3 et N_5 ne pouvant être atteints que si le joueur 1 joue l'action G, on en déduit:

$$\Pr(N_6|D) = 1 - (\Pr(N_3|D) + \Pr(N_4|D) + \Pr(N_5|D)) = 1 - \Pr(N_4|D) = 0$$

Jeux bayésiens dynamiques
Introduction



- Ainsi, le profil stratégique qui consiste:
  - pour le joueur 1 à jouer l'action G avec probabilité $\frac{1}{2}$ (resp. 1) lorsque son type est θ_1' (resp. θ_1''); et
  - pour le joueur 2 à jouer l'action D (resp. G) avec une croyance de se situer au nœud N_3 (resp. N_4) avec probabilité $\frac{1}{3}$ (resp. 1) après observation de l'action G (resp. D)

est un équilibre de Nash qui est aussi un équilibre Bayésien parfait.

Plan

Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens dynamiques

Modèle

- On considère un jeu bayésien dynamique dans lequel à chaque étape $t \in \{1,2,\ldots,T\}$, les joueurs sélectionnent simultanément une action, parfaitement observée de tous en fin d'étape.

- L'ensemble des actions disponibles au joueur i dépend de l'étape t à laquelle il se situe et des actions jouées au préalable.

- L'action retenue par le joueur i peut dépendre de son type θ_i supposé indépendamment distribué du type des autres joueurs.

Jeux bayésiens dynamiques
Modèle

Un *jeu bayésien dynamique* représente une interaction stratégique simultanée entre N joueurs sur plusieurs étapes $t = 1,2, \dots, T$, qui s'écrit

$$G = < \mathcal{N}, (A_i)_{i \in \mathcal{N}}, \Theta, (p_i)_{i \in \mathcal{N}}, (g_i)_{i \in \mathcal{N}} >$$

avec :

- $\mathcal{N} = \{1,2, \dots, N\}$ l'ensemble des N joueurs ;
- $A_i(.)$ l'ensemble des actions disponibles du joueur $i \in \mathcal{N}$, qui dépend de l'histoire H^t des actions jouées jusqu'en t:

$$H^t \to A_i(H^t)$$

Jeux bayésiens dynamiques
Modèle

$$G = < \mathcal{N}, (A_i)_{i \in \mathcal{N}}, \Theta, (p_i)_{i \in \mathcal{N}}, (g_i)_{i \in \mathcal{N}} >$$

- $\Theta = \prod_{i=1}^{N} \Theta_i$, où Θ_i désigne l'ensemble des types du joueur $i \in \mathcal{N}$;
- $p_i(.) \in \Delta(\Theta_i)$ une distribution de probabilité sur le type θ_i du joueur $i \in \mathcal{N}$ qui est :
  - connaissance commune;
  - indépendante de la distribution des types des autres joueurs; et
  - telle que $\forall\, \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in \Theta$, on a $Pr(\theta) = \prod_{i=1}^{N} p_i(\theta_i)$

Jeux bayésiens dynamiques
Modèle

$$G =< \mathcal{N}, (A_i)_{i\in\mathcal{N}}, \Theta, (p_i)_{i\in\mathcal{N}}, (g_i)_{i\in\mathcal{N}} >$$

- $g_i(.)$ la fonction de gains du joueur $i \in \mathcal{N}$, qui dépend de l'histoire H^T des actions jouées par les joueurs stratégiques jusqu'en T et du profil des types θ :

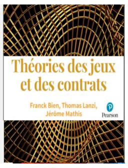
$$(H^T, \theta) \rightarrow g_i(H^T, \theta) \in \mathbb{R}$$

Jeux bayésiens dynamiques
Modèle

- Chaque histoire H_t définit un nouveau jeu $G(H_t)$ qui débute en H_t.

- Dans notre cadre à information imparfaite, le premier nœud de ce sous-jeu appartient potentiellement à un ensemble d'information sur lequel les joueurs forment des croyances.

Jeux bayésiens dynamiques
Modèle

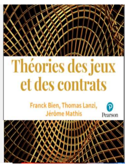


- Une ***stratégie de comportement*** du jeu bayésien dynamique pour le joueur $i \in \mathcal{N}$ est une application σ_i qui (à la date t) sélectionne une (loterie sur) action en fonction de l'histoire H^t des actions jouées par les joueurs stratégiques et du type Θ_i du joueur i:

$$(H^t, \theta_i) \rightarrow \sigma_i(.\,|H^t, \theta_i) \in \Delta(A_i(H^t))$$

- On note $\sigma_i(a|H^t, \theta_i)$ la probabilité avec laquelle l'action $a \in A_i(H^t)$ est sélectionnée par la stratégie σ_i lorsque H^t et θ_i sont réalisés.

Jeux bayésiens dynamiques
Modèle



- Une ***croyance*** du jeu bayésien dynamique pour le joueur $i \in \mathcal{N}$ est une application μ_i qui (à la date t) associe à l'histoire H_t une probabilité sur les profils de types des autres joueurs θ_{-i}:

$$H^t \rightarrow \mu_i(.\,|H^t) \in \Delta(\theta_{-i})$$

- On note $\mu_i(\theta_{-i}|H^t)$ la croyance que forme le joueur i à la date t sur le profil de types θ_{-i} des autres joueurs après avoir observé l'histoire H^t des actions jouées jusqu'en t.
- Les types de joueurs étant supposés non corrélés, on suppose que cette croyance ne dépend pas de la réalisation du type θ_i du joueur i.

Plan

Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Jeux bayésiens dynamiques

Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait

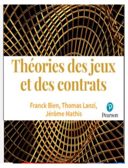
- Nous avons vu que l'équilibre Bayésien parfait (EBP) repose sur deux exigences :

  - La rationalité séquentielle ; et
  - La cohérence des croyances avec les stratégies.

- Voyons comment ces deux exigences s'écrivent formellement.

Jeux bayésiens dynamiques

Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait



- Pour un système de croyance μ donné, le profil stratégique $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathcal{N}}$ satisfait la ***rationalité séquentielle*** si

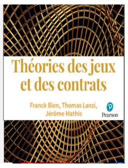
$\forall\, i \in \mathcal{N}, \forall\, \theta_i \in \Theta_i, \forall\, \sigma_i'$ et $\forall\, H^t$ on a

$$E_{(\sigma_i,\sigma_{-i}),\mu}\left[g_i(.)|H^t,\theta_i\right] \geq E_{(\sigma_i',\sigma_{-i}),\mu}\left[g_i(.)|H^t,\theta_i\right]$$

où $E_{\sigma,\mu}\left[g_i(.)|H^t,\theta_i\right]$ désigne l'espérance de gain qui s'écrit comme suit.

Jeux bayésiens dynamiques

Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait



$E_{\sigma,\mu}\left[g_i(.)|H^t,\theta_i\right] =$

$$\sum_{\theta_{-i}\in\prod_{j=1,j\neq i}^{N}\Theta_j} \mu_i(\theta_{-i}|H^t) \sum_{(a_j)_{j\in\mathcal{N}}\in\prod_{j=1}^{N}A_j(H^t)} \left(\prod_{j=1}^{N}\sigma_j(a_j|H^t,\theta_i)\right) g_i(a_1,\dots,a_N,\theta_i,\theta_{-i})$$

lorsque l'ensemble de types (et d'actions) est fini et s'écrit avec une intégrale en place de la somme sinon.

Jeux bayésiens dynamiques
Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait

- La ***cohérence des croyances avec les stratégies*** consiste à utiliser la règle de Bayes de la manière suivante:

  - $t = 1$, on suppose $H^1 = \emptyset$, et $\forall\, i \neq j$ on a $\mu_i(\theta_j | H^1 = \emptyset) = p_j(\theta_j)$.

  - $t > 1$, partant de l'observation de l'histoire H^{t+1} dont l'action du joueur j à la date $t+1$ (sélectionnée selon la stratégie σ_j) est noté a_j, la croyance du joueur j s'écrit

$$\mu_i(\theta_j | H^{t+1}) = \frac{\mu_i(\theta_j | H^t)\sigma_j(a_j | H^t, \theta_j)}{\sum_{\theta_j' \in \Theta_j} \mu_i(\theta_j' | H^t)\, \sigma_j(a_j | H^t, \theta_j')} = \mu(\theta_j | H^t, a_j)$$

lorsque le dénominateur de cette fraction est non nul.

Jeux bayésiens dynamiques
Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait

$$\mu_i(\theta_j | H^{t+1}) = \cancel{\frac{\mu_i(\theta_j | H^t)\sigma_j(a_j | H^t, \theta_j)}{\sum_{\theta_j' \in \Theta_j} \mu_i(\theta_j' | H^t)\, \sigma_j(a_j | H^t, \theta_j')}} = \mu(\theta_j | H^t, a_j)$$

- Lorsque le dénominateur de cette fraction est nul le théorème de Bayes ne s'applique pas.

- La croyance du joueur i doit alors simplement respecter l'égalité avec le membre de droite, qui lui peut être choisi arbitrairement.

- En particulier, c'est le cas lorsque le joueur i observe une action a_j située hors du sentier d'équilibre (i.e., pour laquelle il n'y a pas de type θ_j tel que $\sigma_j(a_j | H^t, \theta_j) > 0$).

Jeux bayésiens dynamiques

Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait

$$\mu_i(\theta_j | H^{t+1}) = \frac{\mu_i(\theta_j | H^t)\sigma_j(a_j | H^t, \theta_j)}{\sum_{\theta'_j \in \Theta_j} \mu_i(\theta'_j | H^t)\, \sigma_j(a_j | H^t, \theta'_j)} = \mu(\theta_j | H^t, a_j)$$

- On remarque que la seconde égalité impose que cette croyance dépend uniquement de l'histoire H^t et de l'action a_j.

- Elle ne dépend ni de l'identité du joueur i (avec $i \neq j$) ni de l'action jouée à la date $t + 1$ par un autre joueur que le joueur j.

- Les croyances que les joueurs i et k forment sur le type θ_j du joueur j doivent donc être identiques, et leur évolution d'une date sur l'autre ne doit tenir compte que du comportement du joueur j à cette date.

Jeux bayésiens dynamiques

Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait

- Un ***équilibre bayésien parfait*** est un profil de stratégies et de croyances $(\sigma, \mu) = (\sigma_j, \mu_j)_{j \in \mathcal{N}}$ satisfaisant:

  - la rationalité séquentielle; et

  - la cohérence des croyances avec les stratégies,

telles que définies ci-dessus.

Plan

Jeux bayésiens statiques

- Exemple introductif
- Modèle
- Information incomplète ou imparfaite ?
- Calcul des croyances a posteriori
- Stratégies
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien
- Application : Duopole de Cournot

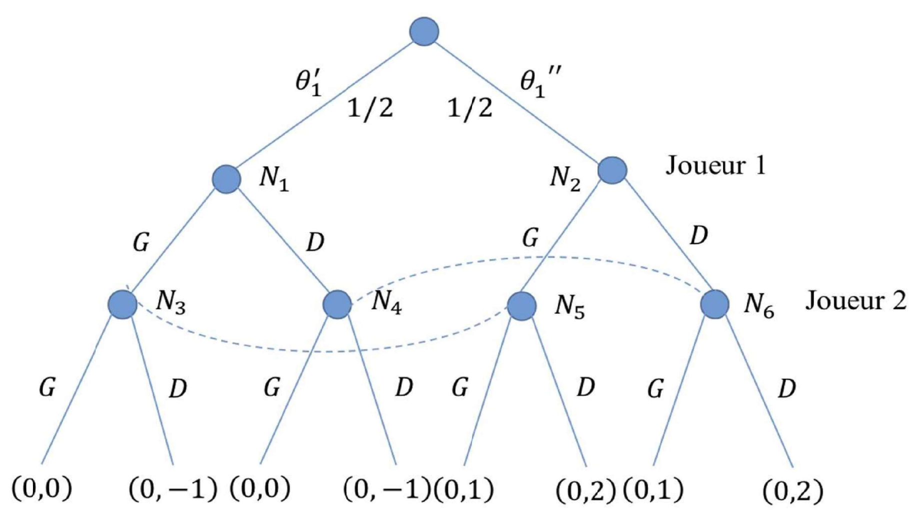
Jeux bayésiens dynamiques

- Introduction
- Modèle
- Concept de solution : l'équilibre Bayésien parfait
- Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

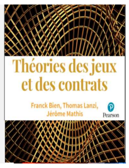
Jeux bayésiens dynamiques

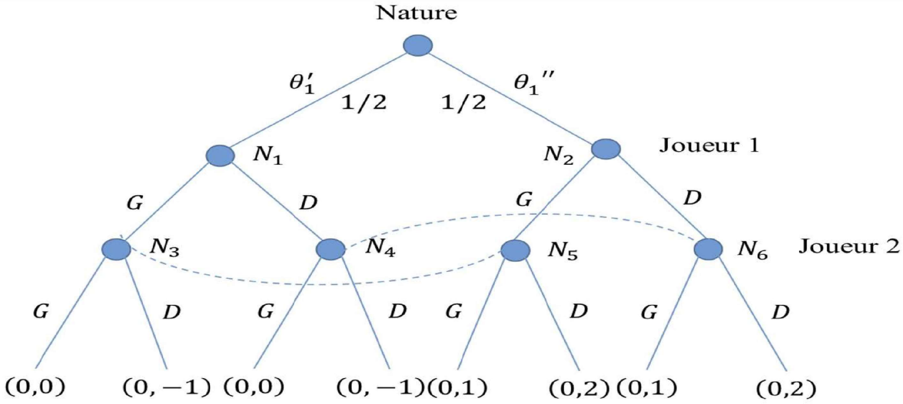
Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

- Reprenons le jeu décrit en introduction afin d'en déterminer l'ensemble des équilibres bayésien parfait.



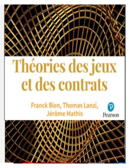
Jeux bayésiens dynamiques
Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

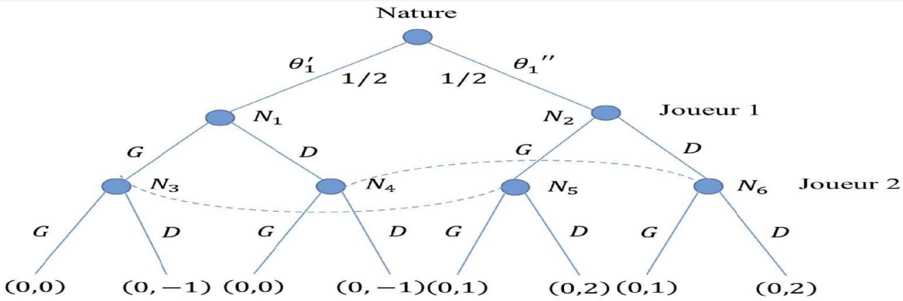




- Soient :
  - $\sigma_1(G|\theta_1)$ la probabilité avec laquelle le joueur 1 sélectionne l'action G lorsque son type est $\theta_1 \in \{\theta_1', \theta_1''\}$; et
  - $\sigma_2(G|a_1)$ la probabilité avec laquelle le joueur 2 sélectionne l'action G après observation de l'action $a_1 \in \{G, \mathrm{D}\}$ du joueur 1.

Jeux bayésiens dynamiques
Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs





Les révisions de croyance du joueur 2 s'écrivent :

- $$\Pr(N_3|G) = \mu_2(\theta_1'|G) = \frac{\Pr(\theta_1')\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)}{\Pr(\theta_1')\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\Pr(\theta_1'')\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\times\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)}{\frac{1}{2}\times\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\frac{1}{2}\times\sigma_1(G|\theta_1'')} = \frac{\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)}{\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\sigma_1(G|\theta_1'')}.$$

Jeux bayésiens dynamiques

Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

- $\Pr(N_5|G) = \mu_2(\theta_1''|G) = 1 - \mu_2(\theta_1'|G) = \frac{\sigma_1(G|\theta_1'')}{\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\sigma_1(G|\theta_1'')}$

- $\Pr(N_4|D) = \mu_2(\theta_1'|D) = \frac{\Pr(\theta_1')\sigma_1\left(D\middle|\theta_1'\right)}{\Pr(\theta_1')\sigma_1\left(D\middle|\theta_1'\right)+\Pr(\theta_1'')\sigma_1\left(D\middle|\theta_1''\right)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\left(1-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)\right)}{\frac{1}{2}\times\left(1-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)\right)} = \frac{1-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)}{2-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)}$$

- $\Pr(N_6|D) = \mu_2(\theta_1''|D) = 1 - \mu_2(\theta_1'|D) = \frac{1-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)}{2-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)}$

Jeux bayésiens dynamiques

Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

- L'espérance de gain du joueur 2 lorsqu'il joue l'action G après observation de l'action G du joueur 1 s'écrit :

$$E_{\sigma,\mu}\left[g_2(.)|G\right] = g_2(G,G,\theta_1')\times\mu_2(\theta_1'|G) + g_2(G,G,\theta_1'')\times\mu_2(\theta_1''|G)$$

$$= 0\times\mu_2(\theta_1'|G) + 1\times\mu_2(\theta_1''|G)$$

$$= \mu_2(\theta_1''|G)$$

$$= \frac{\sigma_1(G|\theta_1'')}{\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\sigma_1(G|\theta_1'')}$$

Jeux bayésiens dynamiques
Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

Et lorsqu'il joue l'action D :

$$E_{\sigma,\mu}\,[g_2(.)|G] \;= g_2(G,D,\theta_1') \times \mu_2(\theta_1'|G) + g_2(G,D,\theta_1'') \times \mu_2(\theta_1''|G)$$

$$= (-1) \times \mu_2(\theta_1'|G) + 2 \times \mu_2(\theta_1''|G)$$

$$= \frac{2\times\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)}{\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\sigma_1(G|\theta_1'')}$$

Jeux bayésiens dynamiques
Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

- La première expression est supérieure ou égale à la seconde si et seulement si

$$(G|\theta_1') + \sigma_1(G|\theta_1'') \;\geq\; \frac{2\times\sigma_1\left(G\middle|\theta_1''\right)-\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)}{\sigma_1\left(G\middle|\theta_1'\right)+\sigma_1(G|\theta_1'')} \;\Leftrightarrow\; \sigma_1(G|\theta_1'') \leq \sigma_1(G|\theta_1').$$

- La meilleure réponse du joueur 2, après observation de l'action G du joueur 1, est telle que

$$\sigma_2{}^*(G|G)\begin{cases} = 1 \text{ si } \sigma_1(G|\theta_1'') < \sigma_1(G|\theta_1') \\ \in [0{,}1] \text{ si } \sigma_1(G|\theta_1'') = \sigma_1(G|\theta_1') \\ = 0 \text{ si } \sigma_1(G|\theta_1'') > \sigma_1(G|\theta_1') \end{cases}$$

Jeux bayésiens dynamiques

Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

- De même, après observation de l'action D du joueur 1, par simple comparaison de l'espérance de gain du joueur 2 lorsqu'il joue l'action G à celle obtenue lorsqu'il joue l'action D, on obtient:

$$\sigma_2{}^*(G|D)\begin{cases} = 1 \text{ si } \sigma_1(G|\theta_1'') > \sigma_1(G|\theta_1') \\ \in [0,1] \text{ si } \sigma_1(G|\theta_1'') = \sigma_1(G|\theta_1') \\ = 0 \text{ si } \sigma_1(G|\theta_1'') < \sigma_1(G|\theta_1') \end{cases}$$

Jeux bayésiens dynamiques

Application : résolution d'un jeu à 2 joueurs

- Le paiement du joueur 1 ne dépendant pas des actions jouées, l'ensemble des équilibres bayésien parfait s'écrit comme l'ensemble des profils de stratégies et croyances (σ, μ) satisfaisant conjointement, $\forall\, \theta_1 \in \{\theta_1', \theta_1''\}$:

  - $\sigma_1(G|\theta_1) = 1 - \sigma_1(D|\theta_1)$, avec $\sigma_1(D|\theta_1)$ quelconque ;

  - $\sigma_2(G|H^2) = \sigma_2{}^*(G|H^2)$, avec $H^2 \in \{G, D\}$; et

  - $\mu_2(\theta_1|H^2) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1(G|\theta_1)}{\sigma_1(G|\theta_1')+\sigma_1(G|\theta_1'')} \text{ si } H^2 = G \\ \dfrac{1-\sigma_1(G|\theta_1)}{2-\sigma_1(G|\theta_1')-\sigma_1(G|\theta_1'')} \text{ si } H^2 = D \end{cases}.$