Chapitre 1
Introduction aux jeux simultanés et séquentiels

Au terme de ce chapitre, vous saurez :

Identifier la nature d'une interaction stratégique.
Construire un jeu sous forme normale.
Construire un jeu sous forme extensive.
Définir des ensembles de stratégies.
Appréhender la pertinence de la théorie des jeux comme un outil d'aide à la décision.

1. Introduction

En décembre 2015, le constructeur aéronautique Airbus a déposé aux États-Unis un nouveau brevet pour un avion de ligne capable de voler jusqu'à 4,5 fois plus vite que la vitesse du son, et de relier ainsi Paris à New York en moins de 90 minutes[1]. Quelles étaient les réelles intentions de l'avionneur européen liées à ce dépôt outre-Atlantique ? Si l'on peut y voir le souci de protéger une innovation technologique, on peut également analyser cette décision d'un point de vue stratégique. Pour Michel Polacco, spécialiste aéronautique de France Info, il s'agirait plutôt d'une manœuvre d'Airbus pour obliger son concurrent américain Boeing à réagir : « *On est dans l'univers de la fusée. Le projet est très beau, mais n'est pas pour demain. Je crois que c'est un coup d'Airbus pour obliger Boeing à imaginer qu'ils vont essayer de développer de tels projets et investir beaucoup de sous.*[2] » Cette analyse s'inscrit pleinement dans le cadre de la théorie des jeux, c'est-à-dire de la discipline dont le sujet d'étude est l'interaction stratégique. Pour ce journaliste, la décision d'Airbus vise à signaler à son concurrent Boeing l'orientation de ses futurs investissements. On peut aussi penser qu'Airbus souhaite par-là affirmer une position de futur leader sur le marché du supersonique.

Les interactions stratégiques ne se limitent pas à l'environnement concurrentiel dans lequel baignent les entreprises et s'affrontent les capitaines d'industrie. Plutôt que de s'attaquer directement au roi, un joueur d'échecs élabore de manière subtile une stratégie qui conduit par exemple son adversaire à la perte de la dame, pièce clé du jeu. Certains politiques, dirigeants de syndicat ou chefs d'organisation en tout genre sont de fin stratèges. Même nos comportements les plus anodins, exercés au quotidien, comme le fait de consommer tel ou tel produit, de coopérer volontairement avec nos collègues ou de se comporter d'une certaine manière au sein de notre cellule familiale, ont un impact sur l'attitude des autres, et définissent en cela une interaction stratégique avec le monde qui nous entoure.

Dans le monde de l'entreprise, la prise de décision est directement liée aux interactions avec les consommateurs, les producteurs, les fournisseurs et les concurrents. La mondialisation amène de plus en plus d'acteurs sur les marchés et ajoute ainsi de la complexité aux interactions.

1. Source : *Les Échos* du 4 août 2015.
2. Michel Polacco, le 10 décembre 2015 sur France Info.

Par exemple, la digitalisation de certains processus augmente le degré de connectivité entre divers acteurs. En politique, les campagnes électorales donnent lieu à toutes sortes de comportements stratégiques où les candidats ne cessent de se repositionner les uns par rapport aux autres en vue de séduire l'électorat. Les comportements stratégiques peuvent également apparaître une fois les candidats au pouvoir, lorsqu'il s'agit de convaincre les autres élus de voter une loi.

L'essence même de la théorie des jeux est d'étudier comment les individus interagissent stratégiquement dans des environnements où les actions[3] sont retenues sur la base d'anticipations et/ou d'observations. La complexité de certaines interactions nécessite la mise en œuvre d'une méthodologie adaptée identifiant de manière exhaustive :

- qui sont les participants de l'interaction ;
- quelle est la nature de l'interaction ;
- quelles sont les stratégies disponibles pour chaque participant ;
- quelles sont les issues plausibles.

Un grand nombre d'interactions sociales nous conduisent à intégrer la réaction des autres dans nos propres choix. Prendre de bonnes décisions nécessite d'appréhender correctement l'environnement stratégique dans lequel on évolue. L'objet de ce chapitre est de montrer comment transposer un problème courant d'interaction stratégique dans le cadre de la théorie des jeux. Celle-ci rationalise les processus de décision interactifs et donne des clés de lecture pour mieux comprendre le comportement des autres et adapter ses propres actions. Afin de sensibiliser le lecteur à cet outil, nous présentons et discutons des exemples standards. Nous abordons également certaines applications de l'économie industrielle. Ses développements récents se sont construits grâce aux avancées de la théorie des jeux. Des auteurs comme Jean Tirole, prix Nobel d'économie 2014, ont contribué à la fois aux développements des outils théoriques et à leurs applications pour comprendre le comportement des entreprises sur les marchés où la concurrence est imparfaite.

2. Définir un jeu stratégique

Commençons par présenter les éléments clés permettant de définir un jeu stratégique. Un **jeu stratégique** décrit une situation dans laquelle des joueurs prennent des décisions dans le cadre d'une **interaction stratégique**, c'est-à-dire dans un contexte où la décision du joueur i affecte non seulement son niveau de bien-être, mais également celui d'autres joueurs $j \neq i$. Chaque joueur est conscient de ces interdépendances et doit en conséquence intégrer dans sa propre décision, que cela soit par anticipation ou par simple observation, les actions retenues par les autres joueurs.

Dans ce cadre, un **joueur** définit un agent économique, ou un groupe d'agents (par exemple, un gouvernement, une banque centrale, une entreprise, etc.), capable de prendre des décisions dans un environnement stratégique complexe – un jeu – encadré par des règles. Celles-ci précisent ce que chaque joueur a le droit de faire et déterminent ce que chacun gagne ou perd, selon ce qui a été joué par l'ensemble des joueurs. Les gains ou les pertes d'un joueur (et plus généralement l'issue du jeu) dépendent ainsi des actions retenues par tous ses adversaires et par lui-même.

Les décisions que retiennent les joueurs s'intègrent dans un concept plus général, appelé **stratégie**. Celle-ci peut se réduire à une décision élémentaire, mais peut aussi consister en un plan d'action complexe, comme nous le verrons plus loin. Les jeux étudiés par la suite sont dits **non**

3. Nous utilisons de manière équivalente les termes « action », « décision », « choix » ou « coup ».

coopératifs dans la mesure où les joueurs ne peuvent former de coalitions au sein desquelles la coopération prend place de manière forcée (existence d'une autorité supérieure capable de faire respecter les accords). La coopération entre joueurs est possible au sein des jeux qui nous intéressent ici, mais elle résulte de choix individuels (où le terme « individu » est ici entendu au sens large de celui de joueur).

2.1 Description sous forme normale

Une bonne manière de se familiariser avec la représentation théorique d'un jeu consiste à se replonger dans nos souvenirs d'enfance pour se remémorer le fameux jeu « pierre-feuille-ciseaux ». Celui-ci met en opposition deux joueuses que l'on nommera Juliette et Elisa. Chacune d'elles forme dans son dos et avec sa main l'un des trois symboles possibles : le poing fermé représente la pierre, la main à plat la feuille, et la main fermée avec l'index et le majeur tendu les ciseaux. Les joueuses présentent simultanément et sans concertation l'un des trois symboles. La confrontation des deux symboles permet d'identifier la gagnante selon les règles suivantes : la pierre brise les ciseaux, mais est enveloppée par la feuille, elle-même coupée par les ciseaux. Ainsi, aucun des trois symboles ne l'emporte sur les deux autres, de telle sorte qu'aucune action ne garantit la victoire de manière certaine. En adoptant la convention que la gagnante acquiert 1 point, la perdante en perd 1 et que, en cas d'égalité, Juliette et Elisa ont des gains nuls, on peut représenter ce jeu sous la forme du tableau 1.1.

Tableau 1.1 Forme normale de pierre-feuille-ciseaux.

		Elisa		
		Pierre	Feuille	Ciseaux
Juliette	Pierre	(0,0)	(−1,1)	(1,−1)
	Feuille	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)
	Ciseaux	(−1,1)	(1,−1)	(0,0)

Dans le tableau 1.1, les actions de Juliette sont représentées en ligne, alors que celles d'Elisa apparaissent en colonne. L'intersection d'une ligne et d'une colonne détermine un gain conditionnel pour chaque joueuse. Par exemple, si Juliette décide de former une feuille (deuxième ligne) alors qu'Elisa choisit les ciseaux (troisième colonne), Juliette perd 1 point et Elisa en gagne 1. Le tableau 1.1 présente les gains de chacune des joueuses (à savoir qui gagne, qui perd ou s'il y a égalité) pour tous les couples d'actions possibles. De façon plus générale, le tableau 1.1 résume toute l'information nécessaire pour décrire et analyser l'interaction :

- qui sont les joueurs et quel est leur nombre ;
- quelles sont, pour chaque joueur, les actions possibles, c'est-à-dire les coups permis dans le jeu ;
- quels sont les gains des joueurs pour toutes les issues possibles.

Ce jeu présente quelques particularités. Tout d'abord, il ne met en scène que deux joueurs, ce qui nous permet de représenter l'interaction sous la forme d'un tableau de gains conditionnels, que l'on nomme **forme normale** ou **forme stratégique** du jeu. Ensuite, ce jeu est **à somme nulle** dans la mesure où ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre, si bien que la somme des gains des deux joueurs est toujours égale à zéro. En ce sens, il décrit un jeu de pur conflit où les intérêts des deux joueurs sont diamétralement opposés. Enfin, le jeu est à **information complète,** car chaque joueur connaît parfaitement l'ensemble de choix possibles de son adversaire (et les siens), ainsi que les conséquences en termes de gains pour toutes les combinaisons de coups joués. Remarquons que, même si chaque joueur connaît l'ensemble des choix possibles, il n'observe pas l'action retenue par son adversaire. Dans ce jeu où les actions sont effectuées de façon simultanée, on qualifie l'information disponible pour chaque joueur d'**imparfaite** dans la mesure où, au moment de jouer, le joueur n'observe pas le choix de son adversaire. Par opposition, une situation d'**information parfaite** définirait un cadre dans lequel chaque joueur joue à tour de rôle et, au moment de choisir son action, est parfaitement informé de tous les coups joués antérieurement par ses adversaires. Le cadre décrit par l'information parfaite ne s'applique donc pas pour les jeux où les actions sont prises de manière simultanée.

Il nous reste à aborder la notion de stratégie qui va se révéler être un élément crucial dans la construction, la résolution et l'analyse d'un jeu. Dans le vocabulaire courant, voire lors d'usages plus spécialisés (sciences économiques, politiques, gestion, etc.), la stratégie est une notion parfois ambiguë. Par exemple, la stratégie marketing d'une entreprise définit un plan d'actions coordonnées, mis en œuvre à court, moyen ou long terme, pour atteindre des objectifs commerciaux. Si l'on retient la définition du *Larousse*, une stratégie désigne l'art de coordonner des actions, de manœuvrer habilement pour atteindre un but. Ces deux définitions sont intéressantes dans la mesure où elles mettent en relation la notion de stratégie avec la planification d'un ensemble d'actions. Dans un cadre de théorie des jeux, on entend par « stratégie d'un joueur » la formulation d'une règle de décision qui spécifie le choix du joueur dans toutes les circonstances dans lesquelles il pourrait avoir à choisir une action. Dans ce sens, une **stratégie** renvoie à la planification du choix des actions d'un joueur. Élément primordial, l'ensemble des stratégies est défini avant que le jeu ne commence et peut s'apparenter à un livre d'instructions permettant à un joueur de déléguer ses choix à tout moment du jeu. Dans le jeu pierre-feuille- ciseaux, il n'existe pas de distinction entre stratégie et action, puisque chaque joueur ne joue qu'une seule fois et que les actions sont retenues de manière simultanée. On peut ainsi noter $S_{\text{Juliette}} = \{\text{Pierre, Feuille, Ciseaux}\}$ l'ensemble des stratégies de Juliette et $S_{\text{Elisa}} = \{\text{Pierre, Feuille, Ciseaux}\}$ l'ensemble des stratégies d'Elisa.

À partir de ces éléments, on peut décrire de manière plus générale un jeu stratégique sous sa forme normale. Un jeu G s'écrit sous la forme $G = < \mathcal{N}, S, (g_i)_{i \in \mathcal{N}} >$ avec :

- $\mathcal{N}$ l'ensemble des joueurs en nombre $N = \text{card}(\mathcal{N})$, et souvent indicés par $i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$;
- S_i l'ensemble des stratégies pures[4] du joueur $i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ qui décrit l'ensemble de ses actions possibles ;
- $g_i(.)$ la fonction de gains (ou d'utilité) du joueur $i \in \mathcal{N}$: celle-ci se définit comme une application de $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$ dans $\mathbb{R}$, telle que $g_i(s_1, s_2, \dots, s_N)$ représente le gain que le joueur i perçoit si le joueur 1 choisit s_1, le joueur 2 choisit s_2, …, et le joueur N choisit s_N.

On note $s = (s_1, s_2, \dots, s_N) = (s_i, s_{-i})$, un profil de stratégies pures pour l'ensemble des joueurs, qui correspond à une issue du jeu où s_{-i} est un profil de stratégies pures pour les joueurs autres que le joueur i. Pour terminer cette présentation formelle d'un jeu sous forme normale ou stratégique, on suppose que tous les joueurs connaissent parfaitement tous les paramètres fondamentaux du jeu qui sont dits connaissance commune des joueurs.

4. Nous introduirons par la suite un autre concept de stratégie, qualifié de stratégie mixte.

2.2 Quelques exemples célèbres

Afin d'illustrer la description des jeux sous forme normale, nous présentons trois jeux célèbres : le « dilemme du prisonnier », une variante de « la bataille des sexes » et le « jeu de Cournot ».

Le dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier constitue certainement l'exemple le plus célèbre de la théorie des jeux. On l'utilise également comme exemple fondamental en sociologie et psychologie sociale pour analyser l'impact du contexte (et dépasser la logique de rationalité qu'impose la théorie économique) dans les prises de décision stratégiques. Il en existe plusieurs déclinaisons, mais nous retenons l'histoire suivante. Deux individus sont soupçonnés d'avoir réalisé conjointement une attaque de banque. Compte tenu de la gravité des faits, la peine de prison maximale prévue par la loi est de dix ans pour chacun des complices. Il manque cependant aux policiers chargés de l'enquête des faits avérés ou des preuves permettant de certifier la culpabilité de nos deux complices présumés. Afin d'obtenir des aveux, les enquêteurs décident d'interroger séparément et simultanément les deux prévenus. L'histoire nous apprend que la peine de prison s'adapte en fonction de ce qui est révélé par les deux prévenus lors de l'interrogatoire. Si l'un des deux avoue l'attaque[5] alors que son complice la nie, la peine de prison maximale est réduite de quatre ans pour l'individu qui avoue. Si les deux avouent mutuellement le délit, alors la peine de prison est réduite d'un an. La réduction de peine est plus faible, car les deux complices sont honnêtes conjointement. Enfin, si aucun des deux n'avoue, les preuves disponibles pour les enquêteurs sont trop faibles pour imposer la peine maximale de dix ans, et les deux complices présumés écopent d'une peine de sept ans.

On peut représenter ce jeu simultané sous forme normale. Il existe deux joueurs $i \in \{1, 2\}$. Chacun d'eux dispose d'un ensemble de deux actions (ou stratégies pures) que l'on note $\{t_i, c_i\}$. t_i correspond à la décision de trahir son complice en avouant le délit, et c_i à celle de coopérer avec son complice en niant les faits aux autorités de justice. La fonction de gains, où ceux-ci sont exprimés en années de prison gagnées par rapport à la peine maximale de dix ans, correspond aux valeurs données dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 Forme normale du dilemme du prisonnier.

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	(1,1)	(4,0)
	c_2	(0,4)	(3,3)

Contrairement au jeu pierre-feuille-ciseaux, le dilemme du prisonnier n'illustre pas une situation de pur conflit puisque, collectivement, les deux individus ont intérêt à coopérer afin que leur peine de prison soit réduite de trois ans. En agissant de la sorte, chacun s'expose cependant à être trahi par l'autre. Cet arbitrage entre coopération et risque de trahison est au cœur de l'analyse du dilemme du prisonnier.

5. On suppose qu'avouer l'attaque prouve la culpabilité.

Le dilemme du prisonnier soulève un ensemble de questions transversales à la psychologie, la sociologie et la philosophie dans la mesure où, au-delà de ses applications économiques, il soulève des questions sur les déterminants moraux de la confiance[6]. Ici, compte tenu de la rationalité des deux joueurs, il est fort probable que les deux complices se dénoncent mutuellement. En effet, quel que soit le comportement du complice, l'individu interrogé obtient toujours une année de réduction de peine supplémentaire en optant pour la trahison. Le « dilemme » provient du fait qu'en se trahissant mutuellement, les deux complices se retrouvent dans une situation pire que s'ils coopéraient l'un avec l'autre. En termes économiques, la situation de trahison mutuelle est sous-optimale en ce qu'elle est Pareto-dominée par celle de coopération mutuelle. Compte tenu de la formulation des règles du jeu, en particulier celles qui concernent les gains, et sous l'hypothèse que les joueurs sont individuellement rationnels, il est fort probable qu'au moins l'un des deux décide de trahir l'autre, ce qui nous renvoie à un manque d'engagement moral de la part des joueurs. Nous reviendrons sur cet exemple dans les chapitres 2 et 3.

Se comporter de manière rationnelle implique d'agir en cohérence avec ses objectifs personnels. En ce sens, la confiance mutuelle peut être compatible avec un comportement rationnel si elle est partie intégrante des objectifs des joueurs. On peut définir des conditions qui conduiraient les deux individus à se coordonner sur une situation coopérative où ils se taisent pendant l'interrogatoire. Imaginons que, avant de commettre le délit, les deux complices décident de passer un contrat[7] tacite stipulant que, s'ils étaient arrêtés et interrogés, celui qui trahirait l'autre subirait une pénalité d'un montant a. Si cette pénalité (par exemple, des représailles exercées à l'encontre des biens ou des personnes de celui qui trahit) est comptabilisée en équivalent d'années de prison gagnées par rapport à la peine maximale, on montre alors aisément que l'accord est respecté dès lors que $a>1$. En effet, dans ce cas, le tableau 1.3 donne la nouvelle forme normale du dilemme du prisonnier. On remarque que si le joueur 1 anticipe que le joueur 2 décide de coopérer (l'analyse se réduit à la deuxième colonne), alors le joueur 1 choisit de coopérer si et seulement si $3>4-a \Leftrightarrow a>1$. Un raisonnement symétrique conduit le joueur 2 à se taire également sous la même condition. Le contrat passé entre les deux joueurs permet de garantir leur relation de confiance.

Tableau 1.3 Forme normale du dilemme du prisonnier avec pénalité.

		Joueur 2	
		t_2	c_2
Joueur 1	t_1	$(1-a, 1-a)$	$(4-a, 0)$
	c_1	$(0, 4-a)$	$(3, 3)$

Où sort-on ce soir ?

Le jeu « Où sort-on ce soir ? » est une variante de la « bataille des sexes » (voir plus loin) qui fait également partie des exemples incontournables de la théorie des jeux. Ce jeu reflète un problème de coordination au sein d'un couple qui doit décider d'un lieu de sortie. Les préférences des

6. Pour ces questions, nous renvoyons le lecteur vers T. Tazdait, *Analyse économique de la confiance*, De Boeck.
7. Ici, la confiance n'est plus le point de départ de la relation humaine, mais le résultat d'un travail en commun.

deux membres du couple sont parfaitement alignées et l'histoire présente ne transcrit qu'un problème de coordination en écartant tout problème de conflit. Imaginons que le couple doit choisir entre aller au cinéma (C) ou bien se rendre au théâtre (T). Le tableau 1.4 représente les gains de notre couple en supposant que leur priorité est d'être ensemble et qu'ils ont une préférence commune pour le cinéma.

Tableau 1.4 Forme normale de « Où sort-on ce soir ? ».

		Elle	
		C	T
Lui	C	$(5, 5)$	$(0, 0)$
	T	$(0, 0)$	$(3, 3)$

Compte tenu des hypothèses retenues sur les préférences de notre couple, il peut sembler évident qu'il se coordonne sur le choix du cinéma.

Comme dans beaucoup de jeux de coordination, celui-ci met en évidence une multiplicité d'issues plausibles et nous montrerons, une fois les concepts de solution abordés, que se coordonner sur le choix du théâtre peut être une issue réalisable de ce jeu. Il serait également aisé d'introduire une dimension conflictuelle en supposant que, même si la priorité du couple est d'être ensemble, Lui préfère aller au cinéma et Elle au théâtre. Ce nouveau scénario renvoie au jeu de la « bataille des sexes ».

Ces situations d'arbitrage entre conflit et coordination sont caractéristiques des relations de concurrence entre les firmes. Cette description permet notamment d'analyser des problèmes économiques comme ceux des standards technologiques pour lesquels il existe un arbitrage entre produire des biens suffisamment standardisés pour interagir sur différentes plateformes et garder une logique de différenciation afin d'accroître les parts de marché. L'exemple des formats vidéographiques haute définition et la guerre opposant le format HD-DVD au format Blu-ray Disc en sont un bon exemple, comme le souligne l'encadré 1.1.

ENCADRÉ 1.1

À partir de 2002, la démocratisation des écrans plats a généré une nouvelle demande de la part des consommateurs, désireux d'avoir accès à une technologie procurant une image d'une qualité proche de celle des diffusions en salle de cinéma. Face à de nombreux désaccords entre les principaux acteurs concernés, le groupe Sony a mis en place la Blu-ray Disc Association, réunissant notamment Sony, Pioneer et Matsushita, afin de promouvoir le format Blu-ray Disc. Le groupe Toshiba, soutenu entre autres par NEC, Sanyo et Microsoft, a quant à lui créé le HD DVD Promotion Group et défendu sa norme HD DVD. Malgré une presse spécialisée plutôt en faveur du HD DVD et des consommateurs relativement indécis face à ce choix technologique, le 19 février 2008, Toshiba annonçait l'abandon du format HD DVD, signifiant en même temps l'officialisation du Blu-ray Disc comme norme unique destinée à remplacer le format DVD. Comment expliquer cette victoire de Sony ? Tout d'abord, son format est compatible avec sa console de jeu très populaire *PlayStation 3*, sortie en novembre 2006. Celle-ci a permis à de nombreux utilisateurs de console d'avoir accès au catalogue de films parus sous le format de Sony, sans pour autant devoir débourser la somme nécessaire à l'achat d'un lecteur Blu-ray Disc de salon. Par ailleurs, le choix du format Blu-ray Disc en tant que support, effectué par de grands producteurs traditionnels de biens culturels (comme Paramount Pictures ou Universal Studios) ou des acteurs importants de la grande distribution (comme le groupe américain Wal-Mart) a précipité la chute du format HD DVD de Toshiba. Cette victoire symbolisait une revanche pour le groupe japonais. En effet, suite à l'échec dans les années 1980 de son format vidéo analogique Betamax et à la victoire du format VHS de JVC, un positionnement central dans l'industrie vidéographique représentait un enjeu majeur pour le groupe japonais.

Le duopole de Cournot

Nous terminons la présentation de ces jeux célèbres par le duopole de Cournot (1838), considéré comme le premier exemple de situation économique explicitement modélisée comme un jeu. Outre son intérêt économique, le modèle de Cournot permet d'illustrer une forme alternative de représentation des stratégies avec, en particulier, des ensembles de stratégies continus. Considérons un marché composé de deux firmes, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, où chaque firme $i \in \{1, 2\}$ produit un bien homogène en termes de quantité $q_i \in \mathbb{R}^+$. La quantité totale produite est notée $q \equiv q_i + q_j$, avec $j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$. Le profit de la firme i s'écrit :

$$\pi_i\left(q_i, q_j\right) = q_i P\left(q_i + q_j\right) - C_i(q_i)$$

où $P\left(q_1 + q_2\right)$ désigne la fonction de demande inverse du marché et $C_i\left(.\right)$ la fonction de coût de production de la firme i.

Chaque firme $i \in \{1, 2\}$ choisit simultanément son niveau de production q_i en considérant la production de son concurrent, q_j, comme donnée. La simultanéité des choix modélise simplement le fait que les décisions de production sont prises séparément, selon des processus internes que le concurrent ne peut observer. En supposant que chaque fonction de profit $\pi_i\left(q_i, q_j\right)$ est deux fois différentiable et strictement concave en q_i, on obtient :

$$q_i^* = \text{argmax}_{q_i} \pi_i\left(q_i, q_j\right) \equiv FR_i(q_j)$$

où $FR_i(.)$ représente la fonction de réaction de la firme i à la production q_j de la firme concurrente[8]. Par exemple, $FR_1(q_2)$ définit le niveau de production optimale de la firme 1 si elle considère que la production de la firme 2 est égale à q_2. Ainsi les fonctions $FR_1(q_2)$ et $FR_2(q_1)$ correspondent à l'ensemble de stratégies pures des firmes 1 et 2.

On peut également obtenir les fonctions de réaction en appliquant la règle qui égalise la recette marginale au coût marginal, de sorte à opter pour un niveau de production qui maximise le profit de la firme considérée. Dans ce cas, la condition de premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial \pi_i\left(q_i, q_{-i}\right)}{\partial q_i} = P\left(q\right) + \frac{dP}{dq}\frac{\partial q}{\partial q_i} q_i - \frac{dC_i\left(q_i\right)}{dq_i} = 0$$

8. La stricte concavité de la fonction de profit nous garantit l'unicité de l'argument qui maximise le profit. Dans le cas d'une multiplicité, $FR_i(.)$ désigne une **correspondance** de réaction qui, contrairement à une **fonction**, peut assigner plusieurs images à un élément de l'espace de départ.

où $\frac{\partial q}{\partial q_i} = 1$.
Cette condition se réécrit :

$$P(q)\left[1 + \frac{q}{P(q)}\frac{dP}{dq}\frac{q_i}{q}\right] = C_m(q_i)$$

où $C_m(q_i)$ représente le coût marginal de production, supposé identique entre firmes. En notant $\alpha_i = \frac{q_i}{q}$ la part de marché de la firme i, $\varepsilon = -\frac{q}{P(q)}\frac{dP}{dq}$ l'élasticité prix de la demande, et L_i l'indice de Lerner qui mesure le pouvoir de marché de la firme i, la condition précédente se réécrit :

$$L_i = \frac{P(q) - C_m(q_i)}{P(q)} = \frac{\alpha_i}{\varepsilon}$$

L'indice de Lerner est proportionnel à la part de marché détenue par la firme i et inversement proportionnel à l'élasticité de la demande. Comme cet indice est positif, les quantités produites q_1^* et q_2^* sont socialement sous-optimales[9]. Les conditions générales de maximisation du profit définissent implicitement les caractéristiques des fonctions de réaction. On obtient une forme explicite si l'on part d'une forme simple des fonctions de demande et de coûts (voir application numérique 1.1).

Finalement, si l'on considère que les fonctions de profits $\pi_i(q_i, q_{-i})$ réalisés par chaque firme décrivent leurs fonctions de gains, alors le duopole de Cournot s'apparente à un jeu sous forme normale avec des dimensions stratégiques de conflits et de coordination.

APPLICATION NUMÉRIQUE 1.1

Une firme (notée 1) a comme fonction de coût $CT_1(q_1) = 10q_1$ lorsqu'elle produit la quantité q_1. Elle est en situation de monopole sur son marché, mais est menacée par l'entrée d'une firme concurrente (notée 2), qui peut accéder à la même fonction de coût variable, mais qui doit supporter un coût fixe d'entrée sur le marché $CF = a$. La fonction de coût de l'entrant potentiel est donc égale à $CT_2(q_2) = 10q_2 + a$, avec q_2 la quantité produite par la firme 2. La demande inverse qui s'adresse à ce marché est donnée par la fonction $P(q) = 100 - q$, où $q = q_1 + q_2$ est la quantité totale produite sur le marché. En situation de monopole, $q_2 = 0$ et la quantité totale produite est égale à $q = q_1$. Calculez les fonctions de réaction des deux firmes et donnez-en une représentation graphique dans le repère (q_1, q_2).

2.3 Description sous forme extensive

La forme normale reflète mal les interactions stratégiques pour lesquelles les joueurs interagissent les uns après les autres. Il suffit par exemple de penser à une partie d'échecs où les adversaires jouent les uns après les autres, avec une information parfaite sur les coups précédemment joués. Les échecs décrivent en effet un jeu séquentiel à information parfaite. On peut opposer ce jeu à une partie de bataille navale qui décrit également un jeu séquentiel, mais avec

9. Un niveau de production socialement optimal implique l'égalité entre prix et coût marginal, soit $P(q) = C_m(q_i)$.

une information imparfaite puisque chaque joueur ne connaît pas la position des navires de son adversaire. Par souci de simplification, nous nous pencherons dans la suite du chapitre sur des jeux séquentiels à deux étapes.

Afin de présenter quelques éléments fondamentaux des jeux séquentiels, nous allons utiliser une version triviale d'un jeu auquel les étudiants s'ennuyant en cours jouent souvent, à savoir le tic-tac-toe ou, plus familièrement, le morpion[10]. Imaginons un tic-tac-toe qui se jouerait sur un carré à quatre cases. Cette réduction permet de baisser le nombre de séquences et facilite l'exposé. Considérons la représentation simplifiée de ce jeu décrite par la figure 1.1. Supposons que le joueur A commence et place la lettre A dans une case de son choix. Dans un but de simplification, on peut utiliser un argument de symétrie pour réduire le nombre de cas possible. Pour ce faire, une fois que le joueur A a choisi une case, on oriente le plateau de telle sorte que son choix corresponde à la case supérieure gauche, notée case 1. Les cases sont ensuite numérotées de 1 à 4 dans le sens des aiguilles d'une montre. Le joueur B répond au joueur A en inscrivant la lettre B dans l'une des trois cases encore libres. Pour finir, le joueur A clôture le jeu en inscrivant la lettre A dans l'une des deux cases restantes.

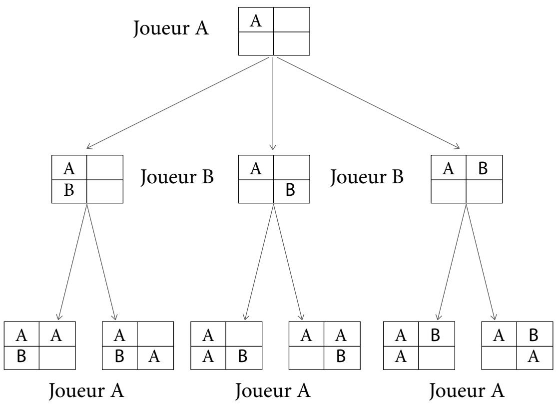

Figure 1.1 Représentation simplifiée du jeu simple du tic-tac-toe.

Le jeu est alors terminé et l'on peut compter les points. Le joueur A gagne 1 point, alors que le joueur B n'en gagne aucun si le joueur A est parvenu à inscrire deux lettres A en diagonale. Dans le cas contraire, le joueur B gagne 1 point et le joueur A n'en gagne aucun. On peut représenter ce jeu simple du type tic-tac-toe sous une forme extensive (voir figure 1.2). On note a_i^j l'action retenue par le joueur $i \in \{A, B\}$ compte tenu de la case $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ sélectionnée. On représente le jeu lorsque le joueur B commence à jouer et doit choisir entre les actions a_B^4, a_B^3 et a_B^2 au nœud de décision N_0. En réaction au choix du joueur B, le joueur A va retenir un choix au nœud N_1, N_2 ou N_3. Au nœud N_1, il dispose des choix $\{a_A^2, a_A^3\}$, au nœud N_2 ses choix sont $\{a_A^4, a_A^2\}$, alors que, au nœud N_3, ses choix sont $\{a_A^4, a_A^3\}$.

10. Il existe une confusion avec le morpion, qui lui ressemble par ses mécanismes, mais dont le but est de former des lignes de cinq éléments sur un espace quadrillé pour l'emporter. Le jeu du tic-tac-toe consiste à aligner des lignes de trois éléments. Pour simplifier la présentation, nous réduisons cependant le jeu à deux éléments alignés.

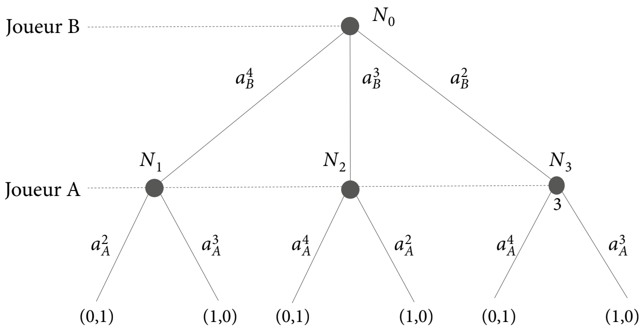

Figure 1.2 Représentation sous forme extensive du jeu simple du tic-tac-toe.

Les gains des deux joueurs sont indiqués aux nœuds terminaux du jeu. Par exemple, si le joueur B retient l'action a_B^4 et que le joueur A lui répond a_A^2, alors le gain du joueur A sera de 0 point et celui du joueur B de 1 point.

Intéressons-nous à la définition des stratégies de nos deux joueurs. Rappelons qu'une stratégie définit la planification d'un ensemble d'actions et qu'on la détermine avant que le jeu ne commence. Dans ce jeu séquentiel, une stratégie va définir l'ensemble des actions qu'un joueur prendrait en chaque nœud où il pourrait avoir à jouer. L'analyse de la figure 1.2 nous permet de définir les stratégies disponibles pour chacun des joueurs. Comme le joueur B ne joue qu'au nœud N_0, il n'existe pas de distinction entre stratégie et action. Plus précisément, chacune de ses stratégies est composée d'une seule action et s'écrit :

$$S_B = \{s_B^1, s_B^2, s_B^3\}$$

où $s_B^1 = \{a_B^4\}$, $s_B^2 = \{a_B^3\}$ et $s_B^3 = \{a_B^2\}$.

Les stratégies du joueur A sont plus subtiles à écrire dans la mesure où ce dernier peut potentiellement avoir à jouer au nœud N_1, N_2 ou N_3. Une stratégie pour le joueur A doit ainsi spécifier un choix en N_1, un choix en N_2 et un choix en N_3. Étant donné que le joueur A dispose à chaque fois de deux actions possibles, le nombre de stratégies disponibles est égal à $2^3 = 8$. L'ensemble des stratégies que le joueur A peut adopter est :

$$S_A = \{s_A^1, s_A^2, \dots, s_A^8\}$$

où, par exemple, la stratégie $s_A^1 = (a_A^2, a_A^4, a_A^4)$ indique que le joueur A jouera l'action a_A^2 au nœud N_1, l'action a_A^4 au nœud N_2 et l'action a_A^4 au nœud N_3.

Les stratégies de nos deux joueurs étant définies, on peut caractériser leurs fonctions de gains qui associent à chaque paire de stratégies le gain qui en résulte. Ainsi, on a :

$$g_A : S_A \times S_B \to \mathbb{R} \text{ et } g_B : S_A \times S_B \to \mathbb{R}$$

avec par exemple $g_A\ (s_A^1,\ s_B^1) = 0$ et $g_B\ (s_A^1,\ s_B^1) = 1$.

Les stratégies et les fonctions de paiement étant spécifiées, on peut représenter ce jeu sous forme normale (voir tableau 1.5), où les stratégies du joueur A figurent en ligne et celles du joueur B en colonne. Chaque intersection ligne/colonne définit le gain de chaque joueur, où la première valeur correspond au gain du joueur A, et la seconde à celui du joueur B.

Tableau 1.5 Représentation sous forme normale du jeu simple du tic-tac-toe.

		Joueur B		
		$s_B^1 = \{ a_B^4 \}$	$s_B^2 = \{a_B^3\}$	$s_B^3 = \{a_B^2\}$
Joueur A	$s_A^1 = (a_A^2, a_A^4, a_A^4)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$
	$s_A^2 = (a_A^2, a_A^2, a_A^4)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$
	$s_A^3 = (a_A^2, a_A^4, a_A^3)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$
	$s_A^4 = (a_A^2, a_A^2, a_A^3)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$
	$s_A^5 = (a_A^3, a_A^4, a_A^4)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
	$s_A^6 = (a_A^3, a_A^2, a_A^4)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
	$s_A^7 = (a_A^3, a_A^4, a_A^3)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
	$s_A^8 = (a_A^3, a_A^2, a_A^3)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$

Une lecture simple du tableau 1.5 nous indique que le joueur B a intérêt à favoriser la stratégie s_B^2, et ce quelle que soit la stratégie employée ensuite par le joueur A. Si l'on omet la simplicité stratégique de ce jeu, il permet de montrer au lecteur comment représenter une simple interaction séquentielle. Il permet aussi d'introduire un premier concept de solution de la théorie des jeux, à savoir la **stratégie dominante**. Une stratégie s est dite **dominante** pour un joueur si, quelles que soient les stratégies adoptées par les autres joueurs, employer la stratégie s lui assure un gain au moins aussi grand que toute autre stratégie à sa disposition. La stratégie s_B^2 est bien une stratégie dominante pour le joueur B, car, quelle que soit la stratégie s_A^k, avec $k = 1, \ldots, 8$, jouée par le joueur A, s_B^2 garantit au joueur B un gain égal à 1 point, alors que les stratégies s_B^1 et s_B^3 lui assurent un gain de 0 ou 1 point. Nous développerons ce concept de stratégie dans le chapitre 2.

À partir de ces éléments, on peut décrire de manière plus générale les éléments constitutifs d'un jeu stratégique avec nombre fini de joueurs sous forme extensive :

- $i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, l'ensemble des joueurs ;
- un arbre caractérisant un ensemble fini X de nœuds du jeu décrivant de manière ordonnée l'histoire de l'interaction entre les joueurs ;
- une application $I(.)$ de X dans $\mathcal{N}$ qui détermine $I(x)$ le joueur qui doit jouer au nœud x [11];
- un ensemble $A(x)$ pour chaque nœud $x \in X$ qui définit les actions possibles pour le joueur $I(x)$ au nœud x ;
- une application $g_i(.)$ de l'ensemble des nœuds terminaux (c'est-à-dire sans successeur) dans $\mathbb{R}$, qui correspond aux gains du joueur $i \in \mathcal{N}$.

11. Plus généralement, $I(x)$ peut désigner un ensemble constitué de plusieurs joueurs qui interagissent de manière simultanée au nœud x. Nous explorerons cette possibilité dans le chapitre 3.

Les stratégies dans un jeu fini sous forme extensive en information parfaite se déduisent des ensembles d'actions possibles $A(x)$ en chaque nœud x contingent au nombre de nœuds atteignables par le joueur $I(x)$. Ainsi, dans un jeu représenté sous forme extensive, $S_i = \prod_{x \in X, I(x)=i} A(x)$ est l'ensemble des stratégies pures du joueur i.

2.4 Applications à l'économie industrielle

Remarquons tout d'abord que tout jeu peut s'analyser dans un cadre séquentiel dès lors qu'un joueur possède une position de leader, lui permettant de jouer avant les autres. Les marchés économiques regorgent de situations concurrentielles dans lesquelles certaines firmes occupent des positions de leader, comme IBM sur le marché du matériel informatique, du logiciel et des services informatiques, et qui, durant les années 1970-1980, était la première capitalisation boursière au monde. Un leader oriente la dynamique de l'innovation et élève parfois des barrières à l'entrée afin d'entraver la concurrence. Des instances de régulation, comme l'Autorité de la concurrence en France ou la Commission européenne au niveau de l'Union européenne, suivent de près ces comportements de position dominante sur les marchés. Ceux-ci peuvent parfois déboucher sur des condamnations pour « abus de position dominante ». Rien que pour l'industrie informatique, on peut penser à Microsoft au début des années 2000, à Intel condamné en 2014 à verser une amende record de plus d'un milliard d'euros pour tentative d'éviction de son concurrent AMD, ou encore, plus récemment, en avril 2016, à l'accusation à l'encontre de Google qui aurait paramétré son moteur de recherche web et son système d'exploitation Android de téléphonie mobile afin de mettre en avant ses services publicitaires.

Le duopole de Stackelberg

Le « duopole de Stackelberg » (1934) est le modèle standard de microéconomie permettant d'analyser une situation de leader sur un marché. Il considère un marché ayant une structure de duopole, avec une firme jouant un rôle actif de meneur (*leader*), et une autre adoptant le rôle passif de suiveur (*follower*). Il constitue une extension du modèle de Cournot, présenté auparavant, pour tenir compte de cette asymétrie. Les deux firmes produisent un bien parfaitement homogène, et donc parfaitement substituable. La seule variable stratégique de chacune d'elles relève de la quantité produite. Comme dans le duopole de Cournot, on parle de concurrence en termes de quantité. Mais, contrairement à ce dernier, les décisions de production sont ici séquentielles. Le duopole de Stackelberg décrit un jeu séquentiel à deux étapes, où l'ensemble des actions est continu et correspond aux quantités produites. À la première étape, la firme meneuse, notée firme 1, choisit un niveau de production qui maximise son profit, tout en anticipant la réaction de la firme suiveuse, notée firme 2. Formellement, en reprenant les variables introduites à l'occasion de la présentation du modèle de Cournot, le profit de la firme 1 s'écrit :

$$\pi_1\left(q_1, FR_2(q_1)\right) = q_1 P\left(q_1 + FR_2(q_1)\right) - C_1(q_1)$$

La maximisation de la fonction de profit $\pi_1\left(q_1, FR_2(q_1)\right)$ génère un niveau de production optimal, noté ici q_1^S.

À la seconde étape, observant le niveau de production q_1 de la firme meneuse, la firme suiveuse détermine son niveau de production optimal, noté q_2^S, au travers de sa fonction de réaction $FR_2\left(q_1\right)$. Ainsi, lorsque les deux firmes se comportent de manière optimale, on a $FR_2\left(q_1^S\right) = q_2^S$.

Ce modèle suppose que la firme suiveuse considère le choix de production de la firme meneuse comme donné. Cette hypothèse permet à la firme meneuse de prévoir le niveau de production de la firme suiveuse et de le prendre en compte au moment de choisir son propre niveau de production. Le duopole de Stackelberg s'apparente donc à un jeu sous forme séquentielle, où les deux firmes choisissent leurs quantités produites de façon non coopérative. Ce modèle peut être très utile pour comprendre les stratégies de prix-limite qui consistent, pour une firme en situation de monopole sur un marché, à fixer un prix dissuadant l'entrée d'un concurrent potentiel. Pour la firme en place, il suffit de calculer son niveau de production pour que le profit de l'entrant potentiel soit négatif. Dans notre cas, la firme 1 cherche le niveau de production q_1 tel que $\pi_2\left(q_1, FR_2(q_1)\right) \leqslant 0$ et en déduit la stratégie de prix-limite associée. L'application numérique 1.2 propose un exemple d'une telle stratégie de prix-limite.

APPLICATION NUMÉRIQUE 1.2

Reprenons les données de l'application numérique 1.1. Supposons que la firme 1 peut fixer sa production avant que la firme 2 ne décide d'entrer sur le marché ou de rester en dehors. Quels niveaux de quantité produite par la firme 1 dissuadent toute entrée sur le marché de la firme 2 ? Quel est l'intervalle de prix de marché correspondant ? Commentez en fonction de la valeur du paramètre a.

Investissement stratégique et concurrence de court terme

L'impact stratégique des investissements sur la concurrence entre firmes est un champ d'application des jeux séquentiels très intéressant. En prolongeant les travaux de Spence (1977, 1979) et Dixit (1980), Fudenberg et Tirole (1984) proposent un modèle dans lequel une firme en place adopte quatre stratégies d'investissement distinctes qui peuvent avoir chacune des conséquences différentes sur le comportement de ses principaux concurrents. Ce jeu permet de distinguer les décisions d'investissement des décisions de production. Les décisions d'investissement déterminent, en amont, les capacités de production et les structures de coûts d'une firme. Les décisions de production définissent quant à elles les quantités produites en aval. Ce jeu permet également d'analyser l'impact de la nature de la concurrence (prix ou quantités) sur les décisions d'investissement.

Le jeu se résume de la manière suivante. On considère un jeu à deux étapes dans lequel une firme en place (firme 1) s'engage à la première étape sur un niveau d'investissement, noté K_1. À la seconde étape, et après avoir observé K_1, un entrant potentiel (firme 2) choisit soit de ne pas entrer sur le marché, soit d'y entrer, sachant que, dans ce cas, une concurrence s'instaure entre la firme installée et la firme entrante selon ces conditions de court terme. En cas d'entrée, à l'étape 2, les deux firmes se font concurrence en choisissant de manière simultanée les actions x_1 et x_2, qui définissent par exemple des niveaux de production. On note π_i le profit de la firme $i \in \{1, 2\}$. Ainsi, à la seconde étape, si la firme 2 décide de ne pas entrer, les profits des firmes sont $\pi_1 = \pi_1^m(K_1, x_1^m\left(K_1\right))$ et $\pi_2 = 0$, où $x_1^m\left(K_1\right)$ est l'action retenue par la firme 1 en fonction de son investissement de première période, K_1, si elle se trouve en situation de monopole. Au contraire, si la firme 2 intègre le marché, les profits sont $\pi_1 = \pi_1(K_1, x_1\left(K_1\right), x_2\left(K_1\right))$ et $\pi_2 = \pi_2(K_1, x_1\left(K_1\right), x_2\left(K_1\right))$, où $x_1\left(K_1\right)$ et $x_2\left(K_1\right)$ représentent les actions retenues par les firmes en fonction de l'investissement K_1 réalisé par la firme 1 en première période lorsqu'elles se font concurrence en termes de prix ou de quantités. On note $x_1^*(K_1)$ et $x_2^*(K_1)$ les actions optimales retenues par les deux firmes à l'étape 2 pour un niveau d'investissement K_1 donné.

L'objet de l'article est d'analyser les conditions pour lesquelles la firme 1 dissuade la firme 2 d'intégrer le marché ou, au contraire, s'accommode de partager le marché avec elle.

Dissuasion à l'entrée

Analysons tout d'abord les stratégies que la firme 1 peut mettre en place pour dissuader l'entrée de la firme 2 sur le marché. L'entrée est dissuadée si K_1 est choisie de telle sorte que :

$$\pi_2\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) \leqslant 0$$

Le cas où l'entrée est bloquée, c'est-à-dire où il n'existe pas d'interaction stratégique, est mis de côté, ce qui revient à considérer la condition suffisante[12] :

$$\pi_2\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) = 0$$

La variable de contrôle de la firme 1 à la période 1 est son niveau d'investissement, K_1. Ainsi, en dérivant le profit de la firme 2 par rapport à K_1, on obtient :

$$\frac{d\pi_2}{dK_1}\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) = \frac{\partial\pi_2}{\partial K_1} + \frac{\partial\pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1} + \frac{\partial\pi_2}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{dK_1}$$

Le troisième terme du membre de droite de cette égalité est, par application du théorème de l'enveloppe, négligeable pour de petites variations de K_1 car $x_2^*(K_1)$ est l'action optimale de la seconde étape, si bien que :

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial x_2}\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) = 0$$

Le premier terme, $\frac{\partial\pi_2}{\partial K_1}$, représente l'effet direct de l'investissement K_1 sur le profit de la firme 2. Si K_1 représente par exemple un investissement ayant un impact positif sur la taille de la clientèle s'adressant exclusivement à la firme 1, alors toute augmentation de K_1 conduit à une diminution du marché s'adressant à la firme 2 et, par conséquent, à une baisse de son profit ($\frac{\partial\pi_2}{\partial K_1} < 0$). Au contraire, l'effet direct peut être positif ($\frac{\partial\pi_2}{\partial K_1} > 0$) dans le cas où K_1 augmente la taille de marché dans l'absolu (par exemple, au travers d'une campagne publicitaire visant à accroître le goût des consommateurs pour ce type de produit), ce qui augmente aussi la demande adressée à la firme 2.

Le second terme, $\frac{\partial\pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}$, décrit l'effet indirect de l'investissement K_1 sur le profit de la firme 2, nommé « effet stratégique ». Cette appellation provient du fait que le choix du niveau d'investissement K_1 affecte ex post l'action x_1 retenue par la firme 1 au travers de $\frac{dx_1^*}{dK_1}$, ce qui, à son tour, affecte le profit de la firme 2 proportionnellement à $\frac{\partial\pi_2}{\partial x_1}$.

12. Pour plus de détails, se référer à J. Tirole, *Théorie de l'organisation industrielle*, tome II, Economica.

La variation du profit de la firme 2 est le résultat de l'effet direct et de l'effet stratégique (voir encadré 1.2). Lorsque l'investissement K_1 diminue le profit de la firme 2 ($\frac{d\pi_2}{dK_1} < 0$), on qualifie le comportement de la firme 1 de dur ou d'agressif, tandis qu'on le qualifie de doux ou conciliant dans le cas contraire ($\frac{d\pi_2}{dK_1} > 0$). Ainsi, si investir rend la firme 1 dure ou agressive, elle doit surinvestir pour dissuader l'entrée de la firme 2. Au contraire, si investir rend la firme 1 douce ou conciliante, elle doit sous-investir pour empêcher l'entrée de la firme 2.

ENCADRÉ 1.2

Effet direct et effet stratégique du choix d'investissement d'une firme sur ses concurrents

L'impact de l'investissement en capacité de production ou en recherche et développement d'une firme sur ses concurrentes se mesure au travers de l'analyse de deux effets : un effet direct et un effet stratégique. L'effet direct mesure l'impact d'une structure de coûts plus efficace sur le profit de la firme considérée. Il est convenu que, avec de meilleures structures de coûts, une firme réalisera des profits supérieurs pour un prix et une quantité donnés. L'amélioration des structures de coût de cette entreprise influencera cependant, au-delà de ses propres quantités produites, celles produites par ses concurrents, ce qui conduit également à des variations de profits pour l'ensemble des firmes. On qualifie cet impact d'effet stratégique. Alors que l'effet direct conduit souvent à une augmentation des profits de l'entreprise à l'initiative de l'investissement, les conséquences de l'effet stratégique sont, *a priori*, ambiguës.

Adaptation à l'entrée

Analysons à présent les stratégies que la firme 1 peut mettre en place pour s'adapter à l'entrée de la firme 2 sur le marché. La firme 2 intègre le marché si :

$$\pi_2\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) > 0$$

Pour la firme en place, l'incitation à investir est dictée par l'impact de K_1 sur son profit. Il convient alors de dériver par rapport à K_1 la fonction $\pi_1(K_1, x_1^*(K_1), x_2^*(K_1))$, ce qui donne :

$$\frac{d\pi_1}{dK_1}\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) = \frac{\partial\pi_1}{\partial K_1} + \frac{\partial\pi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1} + \frac{\partial\pi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{dK_1}$$

Cette fois-ci, toujours par application du théorème de l'enveloppe, c'est le deuxième terme du membre de droite de l'égalité qui disparaît car, $x_1^*(K_1)$ étant l'action optimale de la seconde étape, on a :

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial x_1}\left(K_1, x_1^*\left(K_1\right), x_2^*\left(K_1\right)\right) = 0$$

Le premier terme, $\frac{\partial\pi_1}{\partial K_1}$, représente l'effet direct de l'investissement K_1 sur le profit de la firme 1. Le troisième terme, $\frac{\partial\pi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{dK_1}$, décrit à nouveau l'effet stratégique. Le choix du niveau d'investissement K_1 affecte en effet ex post l'action x_2 retenue par la firme 2 au travers de $\frac{dx_2^*}{dK_1}$, ce qui affecte le profit de la firme 1 proportionnellement à $\frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}$.

Ainsi, dans le cas d'une adaptation à l'entrée, la firme en place doit surinvestir (resp. sous-investir) si son profit augmente, $\frac{d\pi_1}{dK_1} > 0$ (resp. diminue, $\frac{d\pi_1}{dK_1} < 0$).
Les résultats du modèle dépendent explicitement des signes des effets directs et stratégiques. L'analyse de ces deux effets est primordiale pour comprendre l'orientation que doit donner une firme à ses investissements. Cependant, comme le souligne l'encadré 1.2, le signe de l'effet stratégique est parfois ambigu. Pour simplifier l'analyse, nous négligerons dans la suite l'impact de l'effet direct pour nous concentrer sur celui de l'effet stratégique sur le comportement de la firme 1.

Effets stratégiques et nature de la concurrence

Nous pouvons lier les effets stratégiques, de dissuasion ou d'adaptation à l'entrée, à la nature de la concurrence, qui peut s'exercer par les quantités ou par les prix. Pour ce faire, il suffit de faire apparaître la fonction de réaction de la firme 2 dans l'effet stratégique $\frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{dK_1}$ lié à une adaptation à l'entrée. On pose :

$$\frac{dx_2^*}{dK_1} = \frac{dx_2^*}{dx_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}$$

où $\frac{dx_2^*}{dx_1}$ définit la fonction de réaction de la firme 2 lorsque la firme 1 retient l'action x_1. L'effet stratégique avec adaptation à l'entrée se réécrit alors :

$$\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}\frac{dx_1^*}{dK_1}\right) \times \left(\frac{dx_2^*}{dx_1}\right)$$

Si l'on suppose que les actions de seconde période x_1 et x_2 sont de même nature (par exemple des quantités), alors $\frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}$ sont de même signe (par exemple négatif dans le cas de quantités). Ainsi, sous ces considérations et après réarrangements, on peut écrire que :

$$\text{signe}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{dK_1}\right) = \text{signe}\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}\right) \times \text{signe}\left(\frac{dx_2^*}{dx_1}\right)$$

Le signe de l'effet stratégique en cas d'adaptation à l'entrée (décrit par $\frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2^*}{dK_1}$) dépend du signe de l'effet stratégique en cas de dissuasion à l'entrée (décrit par $\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}$) et du signe de la fonction de réaction de la firme 2 (décrit par $\frac{dx_2^*}{dx_1}$).
Le signe de l'effet stratégique en cas de dissuasion à l'entrée (décrit par $\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}$) permet de savoir si l'investissement rend la firme agressive ou conciliante.

Le signe de $\frac{dx_2^*}{dx_1}$ va dépendre de la nature de la concurrence de seconde période. Si la concurrence se réalise sur les quantités[13] produites, les fonctions de réaction sont décroissantes et la dérivée est négative. Au contraire, si la concurrence se réalise par les prix[14], les fonctions de réaction sont croissantes et la dérivée est positive. L'effet stratégique $\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}$ va traduire le comportement de la firme en place. Celui-ci peut être agressif ou conciliant par rapport à l'investissement réalisé, K_1.

Dans ce cadre, nous décrivons quatre stratégies pour la firme en place, toutes inspirées du monde animal. Elles dépendent de l'impact de l'investissement sur le comportement de la firme 1, mesuré par le signe de $\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1}$, et de la nature de la concurrence, exprimée par le signe de $\frac{dx_2^*}{dx_1}$.

Dans l'optique d'une dissuasion à l'entrée, la nature de la concurrence n'a pas d'impact sur les stratégies adoptées par la firme 1. Si l'investissement rend la firme 1 agressive alors, pour prévenir l'entrée de la firme 2 sur le marché, la firme 1 doit adopter une stratégie de « chien de garde » en surinvestissant. Au contraire, lorsque l'investissement rend la firme en place conciliante, elle doit adopter une stratégie de « chat affamé » en sous-investissant. Dans ces deux cas, le profit de la firme 2 décroît avec l'investissement K_1, ce qui réduit ses incitations à intégrer le marché. Le tableau 1.6 résume ces comportements.

L'analyse des stratégies d'investissement dans le cas d'une adaptation à l'entrée est plus complexe et dépend de la nature de la concurrence (voir tableau 1.7).

Si l'investissement rend la firme 1 agressive et que la concurrence est en termes de prix, alors elle doit sous-investir (stratégie du « gentil chiot ») afin d'accroître son profit. La stratégie du « gentil chiot » consiste donc à diminuer l'investissement, alors que ce dernier rend par nature la firme agressive. Dans le même cas, mais avec une concurrence en termes de quantité, c'est une stratégie de « chien de garde » que la firme 1 doit mettre en place. Ici, le surinvestissement contribue à accroître le profit de la firme 1.

Si l'investissement rend la firme 1 conciliante et que la concurrence est en termes de prix, alors elle doit surinvestir (stratégie du « gros chat ») afin d'accroître son profit. La stratégie du « gros chat » consiste donc à augmenter l'investissement, alors que ce dernier rend par nature la firme conciliante. Dans le même cas, mais avec une concurrence en termes de quantité, c'est une stratégie de « chat affamé » que la firme 1 doit mettre en place. Ici, le sous-investissement contribue à accroître le profit de la firme 1.

13. On parle également de « substituts stratégiques ». Par exemple dans le cas d'un duopole de Cournot, lorsqu'une firme va accroître sa production, sa concurrente réduira la sienne. Les décisions (ici de production) s'apparentent alors à des substituts stratégiques.
14. On parle également de « compléments stratégiques ». Par exemple dans le cas d'un duopole de Bertrand, lorsqu'une firme va augmenter son prix, sa concurrente fera de même. Les décisions (ici de prix) s'apparentent alors à des compléments stratégiques.

Tableau 1.6 Typologie des types de stratégies d'investissement en cas de dissuasion à l'entrée.

Dissuasion à l'entrée	Agressif $\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1} < 0\right)$	Conciliant $\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1} > 0\right)$
Concurrence en termes de prix $\left(\frac{dx_2^*}{dx_1} > 0\right)$	« Chien de garde » (surinvestissement)	« Chat affamé » (sous-investissement)
Concurrence en termes de quantité $\left(\frac{dx_2^*}{dx_1} < 0\right)$	« Chien de garde » (surinvestissement)	« Chat affamé » (sous-investissement)

Tableau 1.7 Typologie des types de stratégies d'investissement en cas d'adaptation à l'entrée.

Adaptation à l'entrée	Agressif $\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1} < 0\right)$	Conciliant $\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1^*}{dK_1} > 0\right)$
Concurrence en termes de prix $\left(\frac{dx_2^*}{dx_1} > 0\right)$	« Gentil chiot » (sous-investissement)	« Gros chat » (surinvestissement)
Concurrence en termes de quantité $\left(\frac{dx_2^*}{dx_1} < 0\right)$	« Chien de garde » (surinvestissement)	« Chat affamé » (sous-investissement)

En résumé, l'intuition de la typologie donnée dans les tableaux 1.6 et 1.7 est relativement simple. Supposons que la firme en place songe à un investissement qui la rende plus agressive. Si le niveau d'investissement qui annule le profit de l'entrant conduit à un profit de la firme en place plus élevé que celui qu'elle pourrait s'assurer en permettant à sa concurrente d'entrer, elle adopte un niveau d'investissement élevé, quel que soit le type de concurrence *ex post*. C'est une stratégie de « chien de garde ». En revanche, si ce niveau d'investissement a un coût trop élevé et qu'il est plus rentable pour la firme en place de permettre l'entrée, elle signalera à sa concurrente son intention de renoncer à un comportement agressif en réduisant ce niveau d'investissement en cas de concurrence en termes de prix (stratégie de « gentil chiot ») et en l'accroissant au contraire en cas de concurrence en termes de quantités (stratégie de « chien de garde »). Le raisonnement est analogue lorsque la firme en place songe à un investissement qui la rend plus conciliante.

Cette typologie est intéressante, car elle s'applique à de très nombreuses situations qui illustrent comment une entreprise en place peut tirer avantage de sa position de premier intervenant, soit pour dissuader un concurrent potentiel d'entrer, soit pour mieux tirer parti de l'entrée effective du concurrent.

Innovation et menace d'imitation

Nous développons un dernier exemple dans lequel nous allons introduire un concept clé pour la résolution des jeux séquentiels en information parfaite, à savoir la notion de « menace crédible ». Ce concept, introduit par Selten (1975), permet de restreindre l'ensemble des solutions d'une interaction séquentielle à des situations dans lesquelles chaque agent n'adopte que des comportements fondés sur des stratégies de « meilleures réponses ». Une stratégie de **meilleures réponses** est une stratégie pour laquelle toutes les actions qui la composent maximisent le gain du joueur conditionnellement aux choix des autres joueurs.

L'histoire est la suivante. Il existe un marché composé de deux firmes $i \in \mathcal{N} = \{1, 2\}$ produisant des biens technologiques. La firme 1, qui se comporte comme un leader de Stackelberg, est une entreprise innovante et a le choix entre développer deux types de technologies. La technologie 1, notée T_1, est très innovante, mais nécessite des investissements plus importants que la technologie 2, notée T_2. On note c_j le coût des investissements associés à chacune des technologies $T_j \in \{T_1, T_2\}$. On suppose que $c_1 > c_2 = 0$. La firme 2, qui se comporte comme un suiveur de Stackelberg, n'est pas innovante, mais a la capacité de copier (C) ou non (NC) les technologies produites par la firme 1. On note $\overline{c}_j$ le coût associé à la copie de la technologie T_j. On suppose que $\overline{c}_1 > \overline{c}_2 = 0$. On suppose aussi que la technologie 1, bien que potentiellement très coûteuse à imiter, permet à terme d'éliminer la firme 1 du marché, car $c_1 > \overline{c}_1$.

Le jeu se déroule de la manière suivante. À la première étape, la firme 1 choisit d'investir dans la technologie 1 ou 2. À la seconde étape, compte tenu du choix effectué par la firme 1, la firme 2 décide d'investir ou non dans une copie. Par ailleurs, on suppose que si la firme 1 choisit la technologie 1 et qu'elle est copiée par la firme 2, alors la firme 1 est éliminée du marché. Au contraire, si c'est la technologie 2 qui est retenue et qu'elle est copiée par la firme 2, alors les deux firmes se partagent le marché. On note respectivement p_j et q_j le prix de vente et la quantité demandée de la technologie T_j. On suppose que $p_1 > p_2$. En cas de copie de la technologie T_j, la demande qui s'adresse à chaque firme est identique et égale à $\frac{q_j}{2}$. Lorsque la firme 2 décide de ne pas copier la technologie produite par la firme 1, elle perçoit un gain constant égal à a. Ce jeu comporte donc quatre issues et le tableau 1.8 présente les gains perçus, notés $g_i(.)$, par chaque firme $i \in \{1, 2\}$ en fonction des issues possibles.

Tableau 1.8 Représentation des gains en fonction des paires d'actions jouées dans le jeu d'innovation avec menace d'imitation.

(T_1, C)	(T_1, NC)	(T_2, C)	(T_2, NC)
$\begin{cases} g_1(T_1, C) = \frac{p_1 q_1}{2} - c_1 \\ g_2(T_1, C) = \frac{p_1 q_1}{2} - \overline{c} \end{cases}$	$\begin{cases} g_1(T_1, NC) = p_1 q_1 - c_1 \\ g_2(T_1, NC) = a \end{cases}$	$g_1(T_2, C) = g_2(T_2, C) = \frac{p_2 q_2}{2}$	$\begin{cases} g_1(T_2, NC) = p_2 q_2 \\ g_2(T_2, NC) = a \end{cases}$

Compte tenu des hypothèses faites sur le coût des investissements associés à chacune des technologies T_1 et T_2, on pose que $g_1(T_1, C) \leqslant 0 \leqslant g_1(T_2, C)$. La figure 1.3 représente la forme extensive de ce jeu d'innovation avec menace d'imitation.

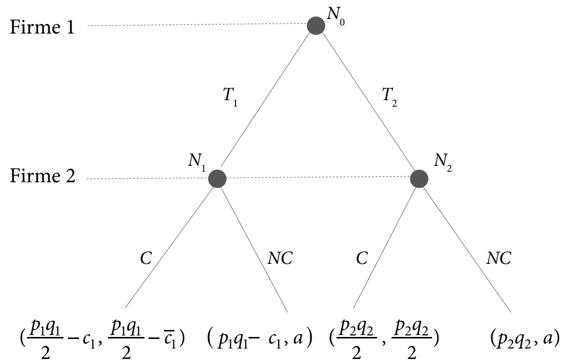

Figure 1.3 Représentation sous forme extensive du jeu d'innovation avec menace d'imitation.

Le jeu décrit précédemment est donc un jeu séquentiel à deux étapes en information parfaite dans lequel, au nœud N_0, la firme 1 choisit entre les technologies 1 et 2 et, en réaction au choix de la firme 1, aux nœuds N_1 ou N_2, la firme 2 choisit de copier ou non le choix technologique de la firme 1. Les gains des deux firmes sont indiqués aux nœuds terminaux du jeu. Par exemple, si la firme 1 retient la technologie T_1 et que la firme 2 lui répond C, alors le gain de la firme 1 sera $g_1(T_1, C) = \frac{p_1q_1}{2} - c_1$ et celui de la firme 2 sera $g_2(T_1, C) = \frac{p_1q_1}{2} - \overline{c}_1$. L'analyse de la figure 1.3 nous permet de définir les stratégies disponibles pour chacune des firmes. Comme la firme 1 ne joue qu'au nœud N_0, il n'existe pas de distinction entre stratégie et action. Plus précisément, chacune de ses stratégies est composée d'une seule action et s'écrit :

$$S_1 = \{s_1^1, s_1^2\}$$

où $s_1^1 = \{T_1\}$ et $s_2^2 = \{T_2\}$.

Les stratégies de la firme 2 sont plus subtiles à écrire dans la mesure où cette dernière peut potentiellement avoir à jouer au nœud N_1 ou N_2. Une stratégie pour la firme 2 doit ainsi spécifier un choix en N_1 et un choix en N_2. Étant donné que la firme 2 dispose à chaque fois de deux actions possibles, le nombre de stratégies disponibles est égal à $2^2 = 4$. L'ensemble des stratégies que la firme 2 peut adopter est :

$$S_2 = \{s_2^1, s_2^2, s_2^3, s_2^4\}$$

où la stratégie $s_2^1 = (C, C)$ indique que la firme 2 jouera l'action C au nœud N_1 et l'action C au nœud N_2. Sous cette stratégie, la firme 2 copie toujours l'innovation technologique réalisée par la firme 1. La firme 2 peut adopter la stratégie $s_2^2 = (C, NC)$ dans laquelle elle ne copierait que la technologie innovante T_1, à la différence de la stratégie $s_2^3 = (NC, C)$, où seule la technologie moins innovante T_2 est copiée. Enfin, la firme 2 peut adopter la stratégie $s_2^4 = (NC, NC)$ qui consiste à ne jamais copier la technologie retenue par la firme 1.

Les stratégies et les gains étant spécifiés, on peut représenter ce jeu sous forme normale en indiquant en ligne les stratégies de la firme 1 et en colonne celles de la firme 2, comme dans le tableau 1.9. Ici, chaque intersection ligne/colonne spécifie les gains, avec pour première valeur le gain de la firme 1, et pour seconde, celui de la firme 2.

Tableau 1.9 Représentation sous forme normale du jeu d'innovation avec menace d'imitation.

	$s_2^1 = (C, C)$	$s_2^2 = (C, NC)$	$s_2^3 = (NC, C)$	$s_2^4 = (NC, NC)$
$s_1^1 = \{T_1\}$	$\left(\frac{p_1 q_1}{2} - c_1, \frac{p_1 q_1}{2} - \bar{c}_1\right)$	$\left(\frac{p_1 q_1}{2} - c_1, \frac{p_1 q_1}{2} - \bar{c}_1\right)$	$(p_1 q_1 - c_1, a)$	$(p_1 q_1 - c_1, a)$
$s_1^2 = \{T_2\}$	$\left(\frac{p_2 q_2}{2}, \frac{p_2 q_2}{2}\right)$	$(p_2 q_2, a)$	$\left(\frac{p_2 q_2}{2}, \frac{p_2 q_2}{2}\right)$	$(p_2 q_2, a)$

Nous présenterons la résolution complète de ce jeu dans le chapitre 2. Nous pouvons cependant d'ores et déjà établir quelques considérations pour la résolution des jeux séquentiels en information parfaite. Tout d'abord, comme la firme 2 se comporte comme un suiveur de Stackelberg, elle réagira de manière optimale au choix technologique réalisé par la firme 1. Par exemple, si cette dernière retient la technologie 1 (branche de gauche partant du nœud N_0 de la figure 1.3, ou première ligne du tableau 1.9), il est optimal pour la firme 2 de la copier si et seulement si $\frac{p_1 q_1}{2} - \bar{c}_1 \geqslant a$. Si cette dernière condition est vérifiée, alors copier la technologie 1 est perçu par la firme 1 comme une menace crédible. De la même manière, si la firme 1 retient la technologie 2, il est optimal pour la firme 2 de la copier si et seulement si $\frac{p_2 q_2}{2} \geqslant a$. Dans ce cas, copier la technologie 2 est également une menace crédible du point de vue de la firme 1. On peut ainsi déduire que la stratégie $s_2^1 = (C, C)$, qui consiste à toujours copier les technologies développées par la firme 1, correspond à un choix rationnel de la firme 2 si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} p_1 \geqslant \dfrac{2(a + \bar{c}_1)}{q_1} \equiv p_1^{\min} \\ p_2 \geqslant \dfrac{2a}{q_2} \equiv p_2^{\min} \end{cases}$$

Les prix $p_1^{\min}$ et $p_2^{\min}$ définissent les valeurs minimales sur le prix de vente des technologies 1 et 2 pour que la firme 2 adopte la stratégie $s_2^1 = (C, C)$. On comprend tout l'intérêt stratégique pour la firme 1 de connaître ces valeurs. En effet, pour dissuader la firme 2 de la copier, il lui suffit d'influencer les prix de vente de ces technologies (à supposer qu'elle en ait la possibilité), de sorte que $p_1 < p_1^{\min}$ et $p_2 < p_2^{\min}$.[15]

15. Si l'on suppose que $q_1 = q_2 = q$, alors $p_1^{\min} > p_2^{\min}$ et une condition suffisante est que $p_2 > p_1^{\min}$.

APPLICATION NUMÉRIQUE 1.3

On considère le jeu d'imitation décrit par la figure 1.3 et le tableau 1.9, où l'on pose $q_1 = q_2 = c_1 = 10$ et $\overline{c}_1 = 8$.

1. Construisez le jeu sous sa forme extensive.
2. Construisez le jeu sous sa forme normale.
3. Définissez des conditions pour lesquelles la firme 2 copie toujours les technologies développées par la firme 1.
4. Sous quelle condition la firme 1 retient-elle la technologie T_1 lorsqu'elle anticipe que la firme 2 adopte la stratégie $s_2^1 = (C, C)$?

3. Compléments

Nous terminons ce chapitre par l'introduction de deux nouveaux concepts utilisés dans les chapitres suivants. Le premier renvoie à la manière dont nous avons défini la notion de stratégie. Le second traite d'une hypothèse sur l'information dans les jeux séquentiels.

3.1 Stratégie mixte

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les stratégies employées par les joueurs étaient purement déterministes, dans le sens où elles ne relevaient pas d'un choix aléatoire. Un footballeur qui tirerait les penaltys toujours du même côté, ou un joueur de badminton qui servirait toujours de la même façon, ne se comporterait pas de façon convenablement sophistiquée, car la partie adverse serait capable de parfaitement anticiper les actions et de les contrecarrer facilement. De la même manière, une firme qui adopterait une politique de baisse tarifaire (offre de coupons promotionnels) selon un calendrier connu de ses concurrentes pourrait être devancée par celles-ci. Dans de telles situations, il est essentiel de se comporter de manière imprévisible, comme si le hasard déterminait le comportement de l'agent. On appelle « stratégies mixtes » celles qui introduisent une dimension de hasard.

Une **stratégie mixte** du joueur $i \in \mathcal{N}$ est une distribution de probabilités sur l'ensemble de ses actions, S_i. Nous remplacerons dorénavant le terme « stratégie » utilisé jusqu'ici, parfois comme synonyme du terme « action », par « stratégie pure ». Une **stratégie pure**, notée $s_i \in S_i$, est donc une stratégie mixte particulière qui utilise une distribution de probabilité dégénérée, selon laquelle l'action s_i est jouée avec probabilité 1 et toute autre stratégie $s_i^{'} \neq s_i$ est jouée avec probabilité nulle.

Afin d'illustrer le concept de stratégie mixte, prenons l'exemple célèbre du tir au penalty. Ce jeu met en scène un tireur et un gardien de but. Le tireur peut viser soit à droite (D), soit à gauche (G). Le gardien de but peut plonger soit à droite (D), soit à gauche (G). Le tireur marque un point s'il tire du côté opposé au plongeon du gardien de but ; dans le cas contraire, il perd un point. Quant au gardien de but, il marque un point s'il plonge du même côté que le tir du tireur ; dans le cas contraire, il perd un point. Dans ce jeu, le tireur dispose de deux stratégies pures qui sont $s_{\text{tireur}}^1 = \{D\}$ et $s_{\text{tireur}}^2 = \{G\}$. Il en est de même pour le gardien de but pour qui les deux stratégies pures sont $s_{\text{gardien}}^1 = \{D\}$ et $s_{\text{gardien}}^2 = \{G\}$.

Les stratégies mixtes définissent des probabilités sur l'ensemble des stratégies pures de chaque joueur. Notons $(x, 1-x)$ la distribution de probabilité définie sur l'ensemble des stratégies pures du tireur, avec $x = \Pr(s_{\text{tireur}} = s_{\text{tireur}}^1 = \{D\})$ et $1 - x = \Pr(s_{\text{tireur}} = s_{\text{tireur}}^2 = \{G\})$. Notons également $(y, 1-y)$ la distribution de probabilité définie sur l'ensemble des stratégies pures du gardien de but, avec $y = \Pr(s_{\text{gardien}} = s^1_{\text{gardien}} = \{G\})$ et $1-y = \Pr(s_{\text{gardien}} = s^2_{\text{gardien}} = \{D\})$. Le tableau 1.10 donne la représentation de ce jeu sous forme normale.

Tableau 1.10 Représentation sous forme normale du jeu du penalty.

			Gardien de but	
			y	$(1-y)$
			G	D
Tireur	x	D	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	$(1-x)$	G	$(-1,1)$	$(1,-1)$

À partir du tableau 1.10, on peut écrire les fonctions de gains espérés de chaque joueur qui dépendent des distributions de probabilités $(x, 1-x)$ et $(y, 1-y)$. Si le tireur joue la stratégie $s^1_{\text{tireur}} = \{D\}$, son gain espéré est égal à :

$$y \times 1 + (1-y) \times (-1) = 2y - 1$$

S'il joue la stratégie $s^2_{\text{tireur}} = \{G\}$, son gain espéré est égal à :

$$y \times (-1) + (1-y) \times 1 = 1 - 2y$$

Lorsqu'il joue l'action $\{D\}$ avec probabilité x, le gain espéré du tireur, noté $G_{\text{tireur}}(x, y)$, est donc égal à :

$$G_{\text{tireur}}(x, y) = x(2y-1) + (1-x)(1-2y)$$

De même, en ce qui concerne les paiements du gardien de but, s'il joue la stratégie $s^2_{\text{gardien}} = \{G\}$, son gain est égal à :

$$x \times (-1) + (1-x) \times 1 = 1 - 2x$$

S'il joue la stratégie $s^1_{\text{gardien}} = \{D\}$, son gain est égal à :

$$x \times 1 + (1-x) \times (-1) = 2x - 1$$

Lorsqu'il joue l'action $\{G\}$ avec probabilité y, le gain espéré du gardien de but, noté $G_{\text{gardien}}(x, y)$, est donc égal à :

$$G_{\text{gardien}}(x, y) = y(1-2x) + (1-y)(2x-1)$$ [16]

L'utilisation des fonctions de gains espérés des deux joueurs nous permet de caractériser leurs fonctions de réaction. Une fonction de réaction définit le choix d'un joueur en fonction des stratégies adoptées par les autres. Dans notre cadre à deux joueurs, utilisant chacun des loteries sur leur ensemble d'action, on note $x(y)$ la fonction de réaction du tireur et $y(x)$ celle du gardien de but. Compte tenu des fonctions de gains espérés, le tireur a une préférence stricte pour un tir à droite si $G_{\text{tireur}}(1, y) > G_{\text{tireur}}(0, y)$, c'est-à-dire lorsque $2y - 1 > 1 - 2y$, ce qui donne $y > \frac{1}{2}$. De même, il a une préférence stricte pour un tir à gauche lorsque $y < \frac{1}{2}$. Enfin,

16. On remarque que, comme le jeu est à somme nulle (ce qu'un joueur gagne, l'autre le perd), on a $G_{\text{tireur}}(x, y) = -G_{\text{gardien}}(x, y)$.

lorsque $y = \frac{1}{2}$, on a $G_{\text{tireur}}(1, y) = G_{\text{tireur}}(0, y)$ et le tireur est parfaitement indifférent entre un tir à gauche et un tir à droite puisque son gain espéré est le même dans les deux situations. Dans ce cas, il peut opter pour un tir à gauche de manière certaine $(x = 0)$, un tir à droite de manière certaine $(x = 1)$ ou, plus généralement, pour n'importe quelle loterie sur ces deux actions ($x \in [0; 1]$). Par conséquent, la fonction de réaction du tireur s'écrit :

$$x(y) \begin{cases} = 0 \text{ si } 0 \leqslant y < \frac{1}{2} \\ \in [0\,;1] \text{ si } y = \frac{1}{2} \\ = 1 \text{ si } \frac{1}{2} < y \leqslant 1 \end{cases}$$

Un raisonnement similaire pour le gardien de but nous donne sa fonction de réaction :

$$y(x) \begin{cases} = 1 \text{ si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \in [0\,;1] \text{ si } x = \frac{1}{2} \\ = 0 \text{ si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

En somme, une stratégie mixte du joueur i est, dans le cas où S_i est fini, une distribution de probabilités caractérisée par des poids $p_i(s_i)$ pour tout $s_i \in S_i$. Une stratégie mixte reflète bien la possibilité pour un joueur de décider de son action en tirant aléatoirement entre plusieurs actions possibles, avec $p_i(s_i)$ la probabilité de jouer l'action (ou la stratégie pure) s_i. Dans un jeu où les joueurs adoptent des stratégies mixtes, la fonction de gain espéré du joueur i est donnée par :

$$G_i(p_1, \ldots p_n) = E_{(p_1, \ldots p_n)}[g_i(s_1, s_2, \ldots, s_N)]$$

où $E_{(p_1, \ldots p_n)}$ désigne l'opérateur d'espérance.

3.2 Ensemble d'information

Dans les jeux séquentiels à deux étapes présentés dans ce chapitre, on a supposé que le joueur qui devait prendre une décision en second avait parfaitement observé les choix de son prédécesseur. Il existe tout un ensemble de situations où cette hypothèse ne se vérifie pas. Par exemple, les firmes possèdent généralement une information imparfaite sur les choix stratégiques de leurs concurrentes, comme le montant ou la répartition des investissements dédiés à la recherche et au développement (R&D).

Pour prendre en compte les situations dans lesquelles un joueur n'a pas les moyens d'observer certaines des actions d'un autre joueur, on introduit la notion d'ensemble d'information. Ce concept permet de formaliser un cadre d'information imparfaite[17].

17. Dans le chapitre 4, nous établirons le lien entre l'information dite « imparfaite » et l'information dite « incomplète ».

Considérons un jeu séquentiel à deux étapes entre deux firmes. À la première étape, la firme 1 doit choisir un niveau d'investissement en R&D. Pour simplifier, on restreint l'ensemble de choix de la firme 1 à deux niveaux. L'un, noté H, correspond à un haut niveau d'investissement, et l'autre, noté B, correspond à un bas (ou faible) niveau. À la seconde étape, la firme 2 procède au même choix d'investissement. L'ensemble de choix de la firme 2 est $\{h, b\}$, où h correspond à un haut niveau d'investissement, et b à un bas niveau.

Ce jeu est identique aux jeux séquentiels à deux étapes présentés précédemment. On y introduit cependant une variante : on suppose que la firme 2, lorsqu'elle prend la main à la seconde étape, ne connaît pas le niveau d'investissement retenu par la firme 1. La figure 1.4 représente cette interaction.

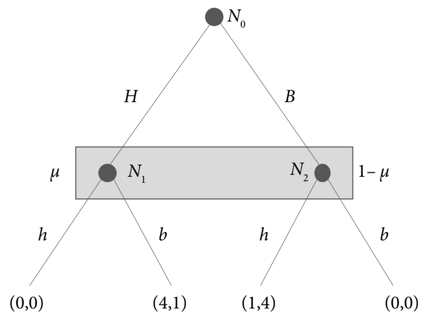

Figure 1.4 Représentation sous forme extensive avec ensemble d'information du jeu d'investissement en R&D.

La figure 1.4 représente l'ensemble d'information par un cadre moucheté entourant les nœuds N_1 et N_2 indiscernables pour la firme 2. Ainsi, au moment d'effectuer son choix entre l'action h et l'action b, la firme 2 n'est pas en mesure d'observer si ce choix s'effectue en N_1 ou N_2.

Évidemment, en deux nœuds appartenant à un même ensemble d'information, les actions possibles doivent être strictement les mêmes (sinon les nœuds ne seraient pas indiscernables). Les actions disponibles en chaque nœud d'un même ensemble d'information sont donc identiques. On peut dire qu'un jeu est à **information parfaite** si chaque ensemble d'information est un singleton, c'est-à-dire s'il ne contient qu'un seul nœud. Sinon, le jeu est à **information imparfaite**.

Dans un jeu séquentiel à deux étapes à information parfaite, on a vu que la stratégie du joueur 2 dépendait explicitement du choix réalisé par le joueur 1. Dans le cas présent, cette définition ne convient plus puisque le joueur 2 n'observe pas le choix de son prédécesseur. La modélisation de la stratégie du joueur 2 est plus délicate puisqu'elle doit rendre compte du fait que celui-ci ignore sa position dans l'arbre et donc les conséquences exactes de son choix.

Une solution naturelle revient à modéliser explicitement le choix du joueur 2 comme un problème de décision dans l'incertain. On note μ la probabilité (subjective) que le joueur 2 accorde à l'hypothèse de se trouver en N_1 ; la probabilité qu'il soit en N_2 est donc $1-\mu$. Dans l'hypothèse où les firmes adoptent des stratégies pures[18], on peut calculer le gain moyen perçu

18. Dans ce cas, μ désigne également la probabilité que la firme 1 joue la stratégie pure H.

par la firme 2 en fonction du choix réalisé par la firme 1. Ainsi, si la firme 2 joue l'action h, son espérance de gain est égale à :

$$\mu \times 0 + (1-\mu) \times 4 = 4 - 4\mu$$

Si elle joue l'action b, son espérance de gain est égale à :

$$\mu \times 1 + (1-\mu) \times 0 = \mu$$

À ce stade de l'analyse, on peut conclure que la firme 2 préfère strictement l'action h à l'action b si et seulement si $\mu < \frac{4}{5}$.

Sans aborder les concepts de solution relatifs à ces types de jeux, développés dans le chapitre 4, on peut compléter l'analyse précédente à l'aide du concept de stratégie mixte. Définissons des stratégies mixtes pour les firmes telles que $(x, 1-x)$ définit la distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures de la firme 1 avec $x = \Pr(s_1 = \{H\})$ et $1-x = \Pr(s_1 = \{B\})$, et $(y, 1-y)$ définit la distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures de la firme 2 avec $y = \Pr(s_2 = \{h\})$ et $1-y = \Pr(s_2 = \{b\})$.

Calculons les espérances de gains en fonction des stratégies mixtes précédemment définies. Pour la firme 1, les conséquences de ces choix dépendent de la stratégie mixte adoptée par la firme 2. Si la firme 1 retient la stratégie $s_1 = \{H\}$ équivalente à $x = 1$, son espérance de gain vaut :

$$y \times 0 + (1-y) \times 4 = 4 - 4y$$

Au contraire, si la firme 1 retient la stratégie $s_1 = \{B\}$ équivalente à $1-x = 1$, son espérance de gain vaut :

$$y \times 1 + (1-y) \times 0 = y$$

La fonction de réaction de la firme 1, qui par définition lui garantit l'espérance de gain la plus élevée, s'écrit :

$$x(y) \begin{cases} = 1 \text{ si } 0 \leqslant y < \frac{4}{5} \\ \in [0\,;1] \text{ si } y = \frac{4}{5} \\ = 0 \text{ si } \frac{4}{5} < y \leqslant 1 \end{cases}$$

Pour la firme 2, les conséquences de ses choix dépendent du nœud auquel elle se trouve. Si la firme 2 retient la stratégie $s_2 = \{h\}$ équivalente à $y = 1$, son espérance de gain vaut :

$$\mu \times 0 + (1-\mu) \times 4 = 4 - 4\mu$$

Au contraire, si la firme 2 retient la stratégie $s_2 = \{b\}$ équivalente à $1-y = 1$, son espérance de gain vaut :

$$\mu \times 1 + (1-\mu) \times 0 = \mu$$

La fonction de réaction de la firme 2 s'écrit :

$$y(\mu)\begin{cases} =1 \text{ si } 0 \leqslant \mu < \frac{4}{5} \\ \in [0\,;1] \text{ si } \mu = \frac{4}{5} \\ =0 \text{ si } \frac{4}{5} < \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

Même si l'on ne résout pas complètement ce jeu, on peut faire une remarque à ce stade. La fonction de réaction $x(y)$ qui définit la stratégie de la firme 1 caractérise une meilleure réponse à la stratégie mixte de la firme 2. Par construction, cette stratégie est identique à celles présentées avec le concept de stratégie mixte. En revanche, la fonction de réaction de la firme 2, notée $y(\mu)$, ne définit pas à proprement parler les meilleures réponses à la stratégie mixte de la firme 1 puisque x n'intervient pas. Elle définit plutôt une meilleure réponse aux croyances définies par μ sur l'ensemble d'information regroupant les nœuds N_1 et N_2. Ces croyances jouent donc un rôle essentiel et ne peuvent pas être fixées arbitrairement. La cohérence avec les stratégies est une exigence minimale. En effet, les probabilités reflétant les croyances de la firme 2 ne peuvent pas contredire celles qui résultent des stratégies des agents. Par exemple, si l'on retient une stratégie donnée de la firme 1 où $x=1$, la seule probabilité subjective compatible est $\mu=1$.

4. Conclusion

La théorie des jeux permet de représenter de manière formelle un grand nombre d'interactions stratégiques au sein desquelles les agents prennent des décisions pour s'affronter et/ou se coordonner. Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté un éventail possible de ces interactions, allant des problèmes de coordination au sein d'un couple aux comportements stratégiques d'investissement d'entreprise. Nous aurions pu multiplier les exemples d'interactions stratégiques, allant de l'adoption d'un comportement individuel de survie par les cellules cancéreuses (biologie), aux interactions entre systèmes multitâches ou aux algorithmes d'apprentissage (informatique), en passant par l'impact des règles de décision sur l'agrégation de l'information et des préférences au sein d'un comité d'experts (sciences politiques) et le mode de régulation optimale des marchés financiers (finance). La capacité de la théorie des jeux à appréhender des situations aussi diverses lui fait gagner en popularité dans le monde académique, mais aussi auprès des praticiens de ces diverses disciplines.

La présentation qui en est faite dans ce chapitre reste incomplète. Nous n'avons encore décrit aucun concept de solution qui permet de sélectionner, parmi toutes les issues possibles d'un jeu, celles qui semblent plus plausibles que les autres. Cette approche, plus normative que descriptive, consiste à prédire comment des individus qui recouvrent certaines caractéristiques (préférences sociales, traits psychologiques, biais culturels, etc.) devraient se comporter au cours de l'interaction stratégique. En pratique, il est tout à fait probable que les individus ne se comportent pas conformément à ce que prédit la théorie appliquée à un modèle donné. Dans ce cas, le manque de réalisme relève davantage du modèle retenu pour dépeindre l'interaction stratégique que de la théorie elle-même. Par exemple, la théorie des jeux appliquée à des modèles dits de « rationalité limitée » permet d'obtenir des prédictions de comportements plus en phase avec ce qui s'observe dans la réalité de certaines interactions. Le chapitre 2 résout les principaux exemples du chapitre 1 à l'aide de concepts de solutions adéquates.

Bibliographie

COURNOT, A.A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.*

DIXIT, A. (1980), « The Role of Investment in Entry Deterrence », *Economic Journal*, vol. 90, n° 357, p. 95-106.

FUDENBERG, D. et TIROLE, J. (1984), « The Fat-Cat Effect, the Puppy-Dog Ploy, and the Lean and Hungry Look », *The American Economic Review*, vol. 74, n° 2, p. 361-366.

SELTEN, R. (1975), « Re-examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games », *International Journal of Game Theory*, vol. 4, n° 1, p. 25-55.

SPENCE, M. (1977), « Entry, Capacity Investment and Oligopolistic Pricing », *The Bell Journal of Economics*, vol. 8, n° 2, p. 534-544.

SPENCE, M. (1979), « Investment Strategy and Growth in a New Market », *The Bell Journal of Economics*, vol. 10, n° 1, p. 1-19.

TAZDAÏT, T. (2008), *Analyse économique de la confiance*, De Boeck.

TIROLE, J. (1988), *Théorie de l'organisation industrielle*, Tome II, Economica.

VON STACKELBERG, H., *Market Structure and Equilibrium*, 1re édition, traduction anglaise, Bazin, Urch et Hill, Springer 2011, XIV, p. 134.

Problème

Énoncé

La société Pharmasolid vient de perdre son brevet sur un médicament pouvant guérir l'addiction aux réseaux sociaux. Il était le seul à soigner l'ensemble des manifestations de l'addiction, à savoir des troubles de la concentration, des comportements moutonniers et une absence de discernement dans le partage des informations. L'investissement dans la recherche pour prolonger le brevet du médicament est coûteux (estimé à une perte de bien-être d'un montant a) ; la société Pharmasolid envisage de se retirer du marché. Suite à ces annonces, son principal concurrent, Pharmadiscount, envisage d'intégrer le marché en proposant un médicament générique pour lequel il existe une incertitude quant à la réussite du traitement. On estime à p la probabilité de sa réussite. L'investissement pour développer ce médicament générique représente une perte de bien-être d'un montant b . Chaque firme est confrontée à un arbitrage stratégique : Pharmasolid peut décider de rester ou de quitter le marché, et Pharmadiscount peut décider d'y entrer ou non.

Si l'une des deux firmes se retrouve seule sur le marché, son bien-être augmente de 14 (cette valeur est réduite à 8 pour Pharmadiscount si son traitement se révèle inefficace). En se partageant le marché, les firmes voient leur bien-être augmenter de 6 (cette valeur est réduite à 3 pour Pharmadiscount si son traitement se révèle inefficace). En quittant le marché, Pharmasolid subit une perte de bien-être d'un montant c . On estime le niveau de bien-être initial de Pharmasolid à 10 et celui de Pharmadiscount à 8.

1. On considère un jeu simultané. Définissez les stratégies de chaque joueur et construisez le jeu sous sa forme normale.
2. On considère un jeu séquentiel dans lequel Pharmasolid joue en premier. Définissez les stratégies de chaque joueur et construisez le jeu sous sa forme extensive. Même question si Pharmadiscount joue en premier.

Solutions des applications numériques

Application numérique 1.1

Une fonction de réaction définit la production optimale d'une firme à un niveau de production réalisé par son concurrent. Elle résulte de la résolution du programme de maximisation du profit de la firme considérée. Dans cette application, le profit de la firme 1, noté $\pi_1(q_1, q_2)$, s'écrit :

$$\pi_1(q_1, q_2) = P(q)\,q_1 - CT_1(q_1) = (100 - (q_1 + q_2))\,q_1 - 10q_1$$

La condition de premier ordre $\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0$ implique la condition $90 - 2q_1 - q_2 = 0$, soit la fonction de réaction $FR_1(q_2)$ suivante :

$$q_1 = FR_1(q_2) = 45 - \frac{1}{2} q_2$$

La stricte concavité de la fonction de profit en q_1 garantit que la condition de second ordre est satisfaite.

Pour la firme 2, le profit que l'on note $\pi_2(q_1, q_2)$ s'écrit :

$$\pi_2(q_1, q_2) = P(q)\,q_2 - CT_2(q_2) = (100 - (q_1 + q_2))\,q_2 - 10q_2 - a$$

La condition de premier ordre $\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0$ implique la condition $90 - 2q_2 - q_1 = 0$, soit la fonction de réaction $FR_2(q_1)$ suivante :

$$q_2 = FR_2(q_1) = 45 - \frac{1}{2} q_1$$

La représentation graphique des fonctions de réaction $FR_1(q_2)$ et $FR_2(q_1)$ dans le repère (q_1, q_2) est donnée dans la figure 1.5.

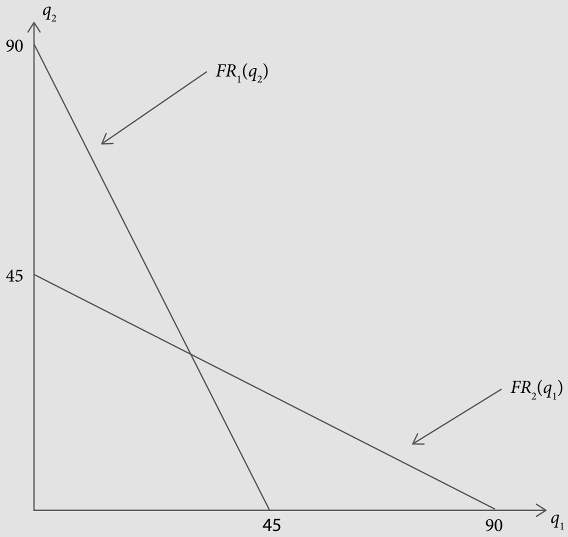

Figure 1.5

Application numérique 1.2

Si la firme 2 décide d'intégrer le marché, elle réagira de manière optimale au travers de sa fonction de réaction $FR_2(q_1) = 45 - \frac{1}{2}q_1$. La firme 1 l'anticipe et est capable de déterminer le niveau de production q_1 qui dissuade l'entrée de la firme 2. La firme 2 reste en dehors du marché tant que son profit est négatif. Ainsi, on cherche q_1 tel que $\pi_2(q_1, FR_2(q_1)) \leqslant 0$. On vérifie que :

$$\pi_2(q_1, FR_2(q_1)) = \left(100 - \left(q_1 + 45 - \frac{1}{2}q_1\right)\right)\left(45 - \frac{1}{2}q_1\right) - 10\left(45 - \frac{1}{2}q_1\right) - a$$

Après simplification, on obtient :

$$\pi_2(q_1, FR_2(q_1)) = \frac{1}{4}(q_1 - 90)^2 - a = \frac{1}{4}\left[(q_1 - 90)^2 - \left(2\sqrt{a}\right)^2\right]$$

La résolution de l'équation du second degré $\frac{1}{4}\left[(q_1 - 90)^2 - \left(2\sqrt{a}\right)^2\right] = 0$ conduit à $\pi_2(q_1, FR_2(q_1)) \leqslant 0$ pour tout $q_1 \in \left[90 - 2\sqrt{a}; 90 + 2\sqrt{a}\right]$. En utilisant l'expression de la demande inverse définie par $P(q) = 100 - q_1 - q_2$ avec $q_2 = 0$, on déduit que le « prix-limite » qui dissuade l'entrée de la firme 2 doit être compris dans l'intervalle $\left[10 - 2\sqrt{a}; 10 + 2\sqrt{a}\right]$.

Lorsque $a = 0$, le prix-limite est égal à 10. Ainsi, il suffit pour la firme 1 de produire une quantité dont le prix de marché est supérieur à 10 pour dissuader l'entrée de la firme 2. De façon générale, plus a augmente, plus l'intervalle sur lequel le prix-limite est défini augmente. De plus, comme par définition $p \geqslant 0$, on remarque que pour $a \geqslant 25$, l'intervalle de prix-limite devient $\left[0; 10 + 2\sqrt{a}\right]$.

Application numérique 1.3

1. En utilisant la figure 1.3 et les données de l'énoncé, on obtient la représentation sous forme extensive suivante :

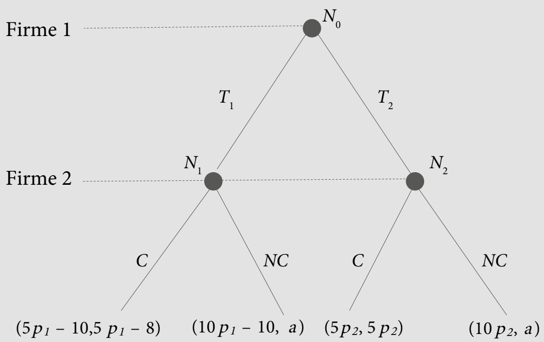

Figure 1.6

2. En utilisant le tableau 1.9 et les données de l'énoncé, on obtient la forme normale suivante :

	$s_2^1 = (C, C)$	$s_2^2 = (C, NC)$	$s_2^3 = (NC, C)$	$s_2^4 = (NC, NC)$
$s_1^1 = \{T_1\}$	$(5p_1 - 10, 5p_1 - 8)$	$(5p_1 - 10, 5p_1 - 8)$	$(10p_1 - 10, a)$	$(10p_1 - 10, a)$
$s_1^2 = \{T_2\}$	$(5p_2, 5p_2)$	$(10p_2, a)$	$(5p_2, 5p_2)$	$(10p_2, a)$

3. Pour répondre à cette question, on peut utiliser la forme extensive du jeu. Lorsque la firme 1 retient la technologie T_1, le choix de copier conduit la firme 2 à un gain de $5p_1 - 8$, alors que le choix de ne pas copier la conduit à un gain de a. Par conséquent, la firme 2 préférera copier la technologie T_1 si $5p_1 - 8 \geqslant a$.

   Au contraire, lorsque la firme 1 retient la technologie T_2, le choix de copier conduit la firme 2 à un gain de $5p_2$, alors que le choix de ne pas copier la conduit à un gain de a. Par conséquent, la firme 2 préférera copier la technologie T_2 si $5p_2 \geqslant a$.

   Pour que la firme 2 copie toujours les technologies de la firme 1, une stratégie notée (C, C), il faut donc que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} 5p_1 - 8 \geqslant a \\ 5p_2 \geqslant a \end{cases}$$

   Ces deux conditions se réécrivent ainsi :

$$\begin{cases} p_1 \geqslant \dfrac{8+a}{5} \equiv p_1^{\min} \\[2ex] p_2 \geqslant \dfrac{a}{5} \equiv p_2^{\min} \end{cases}$$

Lorsque $a \geqslant 0$, on a $p_1^{\min} > p_2^{\min}$ et une condition suffisante pour que (C, C) soit une stratégie faiblement dominante est $p_2 > p_1^{\min}$.

4. Pour répondre à cette question, on utilise la forme normale du jeu. Si la firme 2 joue la stratégie $s_2^1 = (C, C)$, on restreint l'analyse à la première colonne du tableau. Le choix de la technologie T_1 conduit la firme 1 au gain de $5p_1 - 10$, alors que le choix de la technologie T_2 la conduit au gain $5p_2$. Par conséquent, la firme 1 préfère la technologie T_1 dès lors que $5p_1 - 10 \geqslant 5p_2$, c'est-à-dire si $p_1 - p_2 \geqslant 2$.